Sommes et produits

Exercice 1.

1. Écrire les expressions suivantes sans signe Σ ni Π (avec des ... si besoin) :

$$\sum_{i=1}^{10}\sqrt{i} \qquad \sum_{p=1}^{n}(3p)^2 \qquad \sum_{k=0}^{5}(k+1)^3 \qquad \prod_{n=0}^{6}(2n+3) \qquad \sum_{m=3}^{11}\frac{(-1)^m}{m} \qquad \sum_{p=1}^{7}\left(\frac{1}{6}\right)^p$$

2. Écrire les expressions suivantes avec un signe Σ ou Π :

$A = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{11}$; $B(n) = (4-1)(8-1)\ldots(2^n-1)$; $C = \frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{12}{13}$

$D = 10+20+\ldots+140$ puis $E = 100+110+120+\ldots+240$

3. Écrire la somme suivante sans le signe Σ puis la calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2019}(-1)^k$.

Exercice 2.

Compléter chacun des calculs suivants (en écrivant les justifications !) :

$$\sum_{k=0}^{17}3^{k+2} = \sum_{n=\ldots}^{\ldots}3^n \qquad \sum_{i=11}^{20}2^i = \sum_{k=1}^{\ldots}\ldots \qquad \prod_{k=1}^{n}e^k = \prod_{p=2}^{\ldots}\ldots.$$

Exercice 3.

Écrire chacune des sommes suivantes avec un signe Σ et les calculer :

$S_1 = 2+7+12+\ldots+77+82$

$S_2 = 1-2+4-8+16-....+1024-2048$

$S_3 = \dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{8}+...+\dfrac{3}{1024}$

Exercice 4.

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{7}(-3)^k \qquad S_4 = \sum_{m=4}^{11}\frac{1}{5^m} \qquad S_6 = \sum_{k=0}^{7}3(k-2^k) \qquad S_8(n) = \sum_{k=0}^{n}(2^k+4k+n-3)$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{7}(-3k) \qquad S_5(\ell) = \sum_{p=0}^{\ell}3^{p+2} \qquad S_7 = \sum_{k=8}^{31}\frac{k-5}{6} \qquad S_9(n) = \sum_{k=0}^{n}2^k3^{n-k}$$

$S_3(n) = \displaystyle\sum_{k=3}^{60}\frac{k^2-k-2}{k-2}$ en utilisant le changement d'indice $j=k-2$.

Exercice 5. Télescopage.

Calculer : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$; $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$; $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ puis $Q_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Indication pour T_n : $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!}$

Exercice 6.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+3}$.

En déduire la valeur de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}$ pour $n \geqslant 2$.

*** 2.** Par une méthode similaire, calculer la somme $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ (toujours pour $n \geqslant 2$).

Exercice 7.

1. Simplifier les fractions suivantes : $\dfrac{18!}{16!}$ $\dfrac{30!}{27!\,3!}$ $\dfrac{(n+1)!}{n!}$ $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ et $\dfrac{n!}{(n+2)!}$.

2. Écrire à l'aide de factorielles, les produits $A = 24\times23\times22\times\ldots\times5\times4$ puis $B(n) = 8\times9\times10\times\ldots\times n$.

3. Factoriser $n!-2(n-2)!$.