Sommes et produits

Le nom *somme* vient du latin *summa linea*, c'est-à-dire la ligne du haut (au sommet). En effet les romains avaient l'habitude de noter le résultat de leurs calculs sur la ligne du haut.

À la Renaissance, les commerçants ont appris l'utilisation des chiffres arabes et des opérations, en particulier la multiplication, qui permet d'obtenir la recette de la vente en connaissant le nombre d'objets vendus et leur prix unitaire. Ce résultat a été désigné par le même mot que le *produit* vendu.

I. Définition et propriétés des symboles

1) Définition des symboles

Le symbole Σ permet une notation raccourcie des écritures de sommes, et évite l'utilisation de points de suspension.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$ se lit « la somme des 2^k pour k allant de 0 à n », et est défini par $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n}$.

k est appelé l'***indice de sommation***, il prend toutes les valeurs entières entre la borne du bas (ici 0) et celle du haut (ici n), c'est-à-dire qu'il vaut 0, puis 1, puis 2, etc ... jusqu'à n.

Le symbole Π est l'analogue du symbole Σ dans le cadre des produits :

$\displaystyle\prod_{k=3}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ se lit « le produit des $1-\frac{1}{k}$ pour k allant de 3 à n ».

Il est défini par $\boxed{\displaystyle\prod_{k=3}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{n}\right)}$.

Exemples : Si (u_n) est une suite quelconque, $\displaystyle\sum_{k=2}^{7} u_k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$,

et $\displaystyle\prod_{k=2}^{6}(u_k - 1) = \ldots$

$$\sum \ldots\ldots = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p}$$

$$\sum_{k=1}^{11} 2k = \ldots$$

$$\prod \ldots\ldots = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}\times\ldots\times\frac{1}{1024}$$

$$\prod_{k=0}^{8} 2 = \ldots$$

Remarque 1 : L'indice est ***muet***, c'est-à-dire que la lettre n'a pas d'importance : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = \sum_{p=0}^{n} 2^p = \sum_{\ell=0}^{n} 2^\ell \ldots$

mais attention, on ne peut pas utiliser la même lettre pour représenter différents nombres, en l'occurrence ici, l'indice ne peut pas être appelé n car n représente déjà la valeur maximale de l'indice.

Remarque 2 : Certaines sommes et certains produits ne peuvent pas s'écrire avec Σ.

Par exemple, $u_0 + u_3 + u_4 + u_8 + u_{11}$ ne peut pas s'écrire avec Σ car ...

2) Règles de calcul

- On peut **inclure ou sortir un terme** de la somme ou du produit :

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k} \text{ en effet, } \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + u_{n+1} = \dots$$
$$= \dots$$

De même, $\boxed{\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right) \times u_{n+1} = \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots}$.

- On peut **séparer ou regrouper** des symboles Σ ou Π dont les indices varient entre les mêmes bornes :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{4}(2^k+3k) = \sum_{k=1}^{4} 2^k + \sum_{k=1}^{4} 3k} \text{ en effet, } \sum_{k=1}^{4}(2^k+3k) = \dots$$
$$= \dots$$
$$= \dots$$

De même, $\boxed{\prod_{k=1}^{n}(u_k \times v_k) = \prod_{k=1}^{n} u_k \times \prod_{k=1}^{n} v_k}$ et aussi $\boxed{\prod_{k=1}^{n} \frac{u_k}{v_k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} u_k}{\prod_{k=1}^{n} v_k}}$

- On peut **factoriser et développer** :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} 2u_k = 2\sum_{k=1}^{n} u_k} \qquad \text{en effet, } \sum_{k=1}^{n} 2u_k = \dots$$
$$= \dots$$
$$= \dots$$

- On peut **changer d'indice** : $\sum_{p=3}^{7} \frac{1}{p-2} = \sum_{n=\dots}^{\dots} \frac{1}{n}$ en posant $n = p-2$ soit $p = \dots\dots$
  or p va de ..... à .....
  donc n va de ..... à .....

En effet, $\displaystyle\sum_{p=3}^{7} \frac{1}{p-2} = \qquad\qquad = \sum_{n=\dots}^{\dots} \frac{1}{n}$.

Idem avec le produit :
$$\prod_{k=2}^{n}(k-1)3^k$$

Remarque importante : toutes ces règles sont issues de règles de calcul habituelles sur les sommes et les produits, donc en cas de doute, réécrire la formule sans le symbole et avec les points de suspension pour vérifier la validité !

II. Sommes et produits usuels

1) somme de puissances

Si $q \neq 1$: $\boxed{1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$ noté aussi $\boxed{\displaystyle\sum_{\ldots}^{\ldots} \ldots = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$

En effet : $(1 - q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = \ldots$

De manière générale $\boxed{\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}}$. **Exemple :** $\displaystyle\sum_{k=4}^{17} 3^k =$

2) sommes d'entiers consécutifs

$\boxed{1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$ noté aussi $\boxed{\displaystyle\sum_{\ldots}^{\ldots} \ldots = \frac{n(n+1)}{2}}$

En effet, si on définit $S = 1 + 2 + \ldots + n$:

De manière générale $\boxed{\displaystyle\sum_{k=p}^{n} k = (n - p + 1)\frac{p + n}{2} = \text{nombre d'entiers} \times \text{moyenne des extrémités}}$.

Exemple :

3) produit d'entiers consécutifs : notation factorielle

Définition.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$ est appelé ***factorielle*** n (ou n ***factorielle***) et est noté $n!$.
Autrement dit $\boxed{n! = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 2 \times 1}$.
Par convention, $0! = 1$.

Exemples : $1! = \ldots.$ $2! = \ldots\ldots\ldots$ $3! = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{11!}{8!} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\dfrac{99!}{100!} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(n+1) \times n! = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4) une factorisation à connaître

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et a et b dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $\boxed{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$

Autrement dit $\boxed{\displaystyle a^n - b^n = (a - b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k}$.

pour $n = 2$ **:**

pour $n = 3$ **:**

III. Sommes (ou produits) télescopiques

Imaginons que nous essayions de calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$.

Par les formules du logarithme, on a $\ln\left(\dfrac{k}{k+1}\right) = \ln(k) - \ln(k+1)$, ainsi :

$$\sum_{k=1}^{5} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{5} \Big(\ln(k) - \ln(k+1)\Big)$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Simplification en cascade entre 1 et n (pour $n \geqslant 2$) **:**

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k) - \ln(k+1)\Big) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)$$

Bilan : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}}$.

(on peut le retenir, mais savoir le retrouver rapidement est mieux).

Astuce : $\boxed{\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}}$ permet de faire apparaître une somme télescopique (cf. **Exercice 5**).

Exemple avec le produit : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} =$

NE PAS OUBLIER