Pratiques calculatoires autour des fonctions

I. Généralités et structure

Exercice 1.

Soient $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ et $g(x) = \ln(2x+4) + \frac{3}{x}$.
Calculer l'image de chacun des nombres suivants par les fonctions f et g : $2 \quad ; \quad -1 \quad ; \quad e-2 \quad ; \quad \frac{1}{3}$.

Exercice 2.

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :
$f(x) = \sqrt{10-4x} \quad ; \quad g(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad$ et $\quad h(x) = \frac{3x-4}{e^x-1}$.

Exercice 3.

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 11x + 4$ et $g(x) = e^x$.

1. Donner $g(0)$, $f(-2)$, puis $g(f(-2))$, et enfin $g(f(x))$.

2. Quelle est l'expression de $f(g(x))$?

Exercice 4.

On donne deux fonctions, f et g, d'expressions $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = -x + 7$.

1. Déterminer les ensembles de définition de f et de g.

2. Calculer, lorsque c'est possible, $f(g(2))$, $f(g(-3))$ et $f(g(10))$.

3. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto f(g(x))$?

4. Déterminer l'ensemble de définition de $x \mapsto g(f(x))$.

Exercice 5.

Dans chacun des cas suivants, déterminer les ensembles de définition de f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$ et les expressions de $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.

(a) $f(x) = 11x - 3$ et $g(x) = \frac{1}{x+4}$

(b) $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = 2x + 7$

(c) $f(x) = e^{3x-4}$ et $g(x) = \sqrt{x}$

(d) $f(x) = \frac{3}{11}x - 7$ et $g(x) = \ln(x-2)$

(e) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ et $g(x) = 3\sqrt{x}$

(f) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ et $g(x) = \frac{x+1}{2x+16}$

Exercice 6.

Pour chacune des fonctions f et g suivantes, déterminer les ensembles de définition de f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$, ainsi que les expressions de $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.

1. $f(x) = x^2 + 4$ et $g(x) = \ln(x)$

2. $f(x) = (x-2)(x+3)$ et $g(x) = \dfrac{2}{x}$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = -5x + 2$

4. $f(x) = 5x^2 - 3x$ et $g(x) = e^x$

5. $f(x) = 7(x+1)$ et $g(x) = \ln(x)$

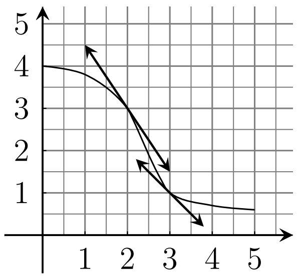
*** 6.** $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{7}{-9x+4}$

* Exercice 7.

On définit $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 1 - x$ et $h(x) = \frac{x}{1-x}$.
Déterminer les ensembles de définition de chacune de ces fonctions, ainsi que des fonctions $h \circ g \circ f$ et $f \circ g \circ h$.

II. Dérivées et variations

Exercice 8.



Le graphique ci-contre est la représentation d'une fonction f sur $[0;5]$, ainsi que ses tangentes en certains points.
On précise qu'au point $A(0;4)$, la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ est horizontale.

1. Donner les valeurs des nombres $f(0)$, $f'(0)$, $f(2)$, $f'(2)$, $f(3)$ et $f'(3)$.

2. Déterminer à partir du graphique, les équations des tangentes à la courbe aux points d'abscisse 0, 2, et 3.

Exercice 9.

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble de dérivabilité.

(a) $f(x) = 2x^2 - 3x$
(b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{x^3}$
(c) $f(x) = \sqrt{-2x+4}$
(d) $f(x) = (3x^3 - 7x + 4)\sqrt{x}$
(e) $f(x) = e^{2-3x} - \frac{5}{x^2}$
(f) $f(x) = (2-x)^3$
(g) $f(x) = 3xe^{x^2-3x+2}$
(h) $f(x) = \frac{4x-5}{2x-1}$
(i) $f(x) = \cos(3x-1)$

Exercice 10.

Dériver les fonctions suivantes (*facultatif : déterminer les ensembles de dérivabilité*) :

(a) $f(t) = \frac{t-1}{t^2+3}$
(b) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
(c) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
(d) $f(x) = \sin(x^2 - 3)$
(e) $f(x) = (x^3 + x - 2)^4$
(f) $f(x) = \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2}$
(g) $f(t) = (\cos^2(t) + \frac{3}{2})\sin(2t)$
(h) $f(x) = \frac{(\ln x)^4}{x}$
(i) $f(x) = \frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2-1}$
(j) $f(x) = \ln(\ln(x))$
(k) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin(x)+2}}$
(l) $f(x) = \sin\left(\ln(1+\frac{2}{x})\right)$

Exercice 11.

Pour chacune des fonctions suivantes, dresser le tableau des variations de f sur son ensemble de définition et préciser les extrema locaux éventuels.

1. $f(x) = -x^3 + 3$ **2.** $f(x) = \ln(x^2+4)$ **3.** $f(x) = \sqrt{5-2x}$ **4.** $f(x) = \frac{1}{3x+2}$

Exercice 12.

La fonction f est définie sur $[-3;4]$ et le tableau de ses variations est donné ci-contre, et on précise que $f(2) = 0$.
Déterminer les ensembles des solutions des équations et inéquations :
(a) $f(x) = 0$ **(b)** $f(x) < 0$ **(c)** $f(x) > 1$ **(d)** $f'(x) > 0$.

x	-3		0		4
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1

.

III. Polynômes

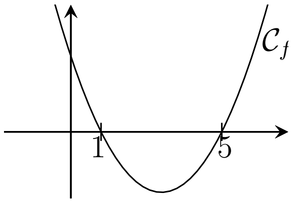
Exercice 13.

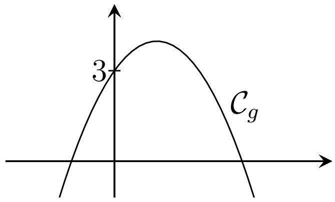
Dans chacun des cas suivants, déterminer des fonctions affines passent par le point A et ayant pour coefficient directeur m.

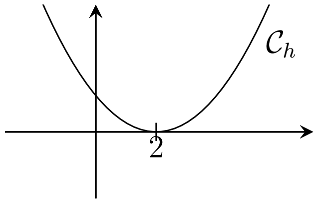
1. $A(0;3)$ et $m = 2$. **2.** $A(3;2)$ et $m = 0$. **3.** $A(2;1)$ et $m = -3$. **4.** $A(-1;1)$ et $m = 2$.

Exercice 14.

Pour chacune des courbes suivantes, déterminer un polynôme de degré 2 qui pourrait avoir cette représentation.







Exercice 15.

Pour chacun des polynômes suivants, donner les variations, trouver les racines réelles ou complexes, puis étudier le signe, et donner la forme factorisée réelle lorsqu'elle existe.

$A(x) = 2x^2 - 12x + 19$ $\quad B(x) = -x^2 + 4x - 3$ $\quad C(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{2}x + 2$

$D(x) = -2x^2 + 9x - 4$ $\quad E(x) = 8x^2 + 4x + 5$ $\quad F(x) = -x^2 + 7x - 1$

$G(x) = -x^2 - \dfrac{11}{3}x + \dfrac{4}{3}$ $\quad H(x) = 2x^2 - 3x + \dfrac{9}{8}$ $\quad I(x) = -3x^2 + 4x - 4$

Exercice 16.

Résoudre :

1. $2mx - 3 = 4x + 5m$ (l'inconnue est x)

2. $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$

3. $(5x - 4)^2 - (3x + 7)^2 = 0$

4. $2\frac{7x-1}{3} - \frac{5x+1}{12} = \frac{3x+2}{4}$

Exercice 17.

Déterminer tous les couples de nombres complexes (z, t) tels que $\begin{cases} z + 2t = \sqrt{3} \\ zt = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Donner la forme trigonométrique de chacun de ces nombres.

* Exercice 18.

1. Pour quelles valeurs de m l'inégalité $(2m - 1)x^2 - 2x + 4m - 3 > 0$ est-elle vraie pour tout x ?

2. Soit $P(x) = x^3 + 2x^2 + mx - 1$.
Pour quelle valeur de m est-il divisible par $(x - 2)$. Dans ce cas, le factoriser.

3. Factoriser dans $\mathbb{R}$: $3x^4 + 3x^2 - 18$ (on pourra poser $X = x^2$ pour obtenir une première factorisation).

Exercice 19.

Effectuer la division euclidienne de $2x^3 - x^2 + 4x + 7$ par $x + 1$, puis de $2x^3 - x^2 + 10x - 5$ par $x^2 + 5$. Et (éventuellement) de $2x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 20x^2 + 23x - 4$ par $x^2 - 3x + 4$.

Exercice 20.

Factoriser dans $\mathbb{R}$: **(a)** $x^3 - 27$ **(b)** $2x^3 - 7x^2 - 7x + 12$ **(c)** $-2x^3 + 4x^2 - 10x - 16$

Exercice 21.

1. Soit $P(x) = x^3 - \dfrac{7}{3}x^2 - 2x$. Factoriser au maximum ce polynôme, et préciser ses racines.

2. On définit $Q(x) = -2x^3 - 4x^2 + 22x + 24$.
Déterminer une racine évidente de $Q(x)$, puis factoriser ce polynôme le plus possible.

3. On appelle S le polynôme $S(x) = -2x^3 - 4x^2 + 46x + 120$.
Calculer $S(-4)$ puis résoudre l'équation $S(x) = 0$. Factoriser S au maximum.

IV. Signes et inégalités

Exercice 22.

Étudier le signe des expressions suivantes :

$f(x) = (3x^2+1)(-2x+3)$; $g(x) = -3x+4-\frac{7}{x+2}$; $h(x) = \frac{-3x+5}{x^2-2x+1}$
$k(x) = e^x - 2$; $\ell(x) = x\ln(x) - x$

Exercice 23.

1. Représenter sur un axe, dans chacun des cas, l'ensemble des valeurs x satisfaisant la condition :
(a) $|x-2| \leqslant 3$ **(b)** $|x+3| > 1$ **(c)** $|x-2| < 3$ et $|x-6| \geqslant 3$.

2. Résoudre : **(a)** $|-x+4| \leqslant 6$ **(b)** $|3x-1| > 2$ **(c)** $|2x-4| \leqslant |x-1|$ **(d)** $|x-3| = |x+1|$.

Exercice 24. Inéquations.

Résoudre (attention aux ensembles de définition) :

(a) $\dfrac{x(x+1)}{3x-2} \leqslant 0$
(b) $2x^2+3x-2 < 0$
(c) $\dfrac{x^2-9}{1-x} > 0$
(d) $3x^3+2x^2-x \geqslant 0$
(e) $\dfrac{x-1}{x-3} - 1 > \dfrac{2}{x-2}$
(f) $\dfrac{1}{x} \geqslant x$
(g) $\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{3}{y} - 4 \geqslant 0$
(h) $\dfrac{2x-1}{x+3} > \dfrac{2x}{x-4}$
(i) $|2x-11| \leqslant |x-5|$

Exercice 25.

1. Soit R le polynôme donné par $R(x) = 3x^3 - 18x^2 + 36x - 24$.
Factoriser ce polynôme au maximum, et construire son tableau de signes.

2. Soit $T(x) = x^3 - 9x^2 - x + 105$.
Calculer $T(-3)$ et en déduire une factorisation de $T(x)$ puis résoudre l'inéquation $T(x) \geqslant 0$.

Exercice 26.

Construire le tableau des variations des fonctions ci-dessous en précisant les extrema éventuels.

(a) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$
(b) $f(x) = xe^{-x}$
(c) $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$
(d) $f(x) = \ln(x^2+2x+2)$
(e) $f(x) = (3x-7)e^{-2x}$
(f) $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$

V. Primitives

Exercice 27.

Associer chaque fonction de la première colonne à une primitive de la deuxième.

a) $f(x) = e^x + 6x - 4$
b) $f(x) = 2x\cos(1+x^2)$
c) $f(x) = \dfrac{9x^2}{(3x^3-7)^2}$
d) $f(x) = \left(18x + 3\dfrac{1}{x^2}\right) e^{3x^2 - \frac{1}{x}}$
e) $f(x) = \dfrac{-4}{(2x+1)^2}$
f) $f(x) = x(2\sin x + x\cos x)$
g) $f(x) = \dfrac{9x^2}{3x^3-7}$
h) $f(x) = \ln(2x+1)$

i) $F(x) = \dfrac{2}{2x+1}$
ii) $F(x) = \ln(3x^3-7)$
iii) $F(x) = x^2\sin x$
iv) $F(x) = 3e^{3x^2-\frac{1}{x}}$
v) $F(x) = e^x + 3x^2 - 4(x-3)$
vi) $F(x) = \dfrac{2x+1}{2}\ln(2x+1) - x + 1$
vii) $F(x) = -\dfrac{1}{3x^3-7}$
viii) $F(x) = \sin(1+x^2)$

Exercice 28.

Donner des primitives de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = x^3 - 4x + \frac{1}{x}$

$g(x) = e^{3x-4}$

$h(x) = \dfrac{3x^2+2}{(x^3+2x+4)^5}$

$i(x) = \cos^3(x)\sin(x)$

$j(x) = 3x(x^2+7)^4$

$k(x) = \dfrac{1}{2x}$

$l(x) = 3xe^{x^2}$

$m(x) = \dfrac{-4x+6}{x^2-3x+5}$

$n(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}}$

$p(x) = 4(2x-11)^3$

$q(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$

$r(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

VI. Limites

Exercice 29.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^2) \times e^x$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3+4x+1}{3x^3+4}$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+1}{3x-4}$

4. $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{1}{(x-5)^2}$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-2x}{x+1}$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\cos(x)+x}{x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) - e^{2x} + 4x - 11$

8. $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{3x-4}{x-2}$

9. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x)}{1-e^x}$

10. $\lim\limits_{x\to0^-} \left(1+\dfrac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x^2}}$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2-\cos(x)}$

12. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$

13. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^6-1}{x^2-1}$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-x+1} - 2x$

15. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$

16. $\lim\limits_{x\to2^+} (x-2)\ln(x^2-4)$.

17. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-3x+2}$

18. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-e^x}{x^2+3x+1}$

Exercice 30.

Donner l'ensemble de définition, les limites aux bornes et construire le tableau des variations complet d'au moins sept des fonctions ci-dessous.

(a) $f(x) = x + \frac{1}{x-2}$

(b) $f(x) = e^x(e^x-2)$

(c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 7$

(d) $f(x) = (x-2)(3-x)$

(e) $f(x) = 10\sqrt{x} - 5x$

(f) $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 9x^2$

(g) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

(h) $f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$

(i) $f(x) = x^2 + \ln(x)$

(j) $f(x) = e^{2x^3+6x^2-18x+3}$

(k) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

(l) $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$

(m) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$