Pratiques calculatoires autour des fonctions
F - Limites

I. Calculs de limites : cas général

1) Rappel sur les limites usuelles

Ces limites se déduisent de l'observation des courbes des fonctions de référence :

- ⋆ puissances n, avec $n > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et pour n pair $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ « la limite de x^n lorsque x tend vers $-\infty$ est $+\infty$ »
  pour n impair $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$
- ⋆ inverses de puissances : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ et pour n pair $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
  pour n impair $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$
- ⋆ racine carrée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- ⋆ logarithme : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- ⋆ exponentielle : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

2) Opérations sur les limites

Notations : . peut représenter un nombre fini ou $+\infty$ ou $-\infty$
ℓ et ℓ' sont des nombres finis
FI signifie « forme indéterminée » : c'est une situation où il n'y a pas de réponse générale, il faut traiter au cas par cas, en modifiant la forme de l'expression. Le résultat pourrait être $-\infty$ ou $+\infty$ ou un nombre fini.

Somme de deux fonctions

si $\lim\limits_{x\to .} u(x) =$	ℓ			$+\infty$		$-\infty$
si $\lim\limits_{x\to .} v(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to .} u(x) + v(x) =$						

On traite la différence de deux fonctions de la même façon, en utilisant le fait que $u(x) - v(x) = u(x) + (-v(x))$.

Produit de deux fonctions

si $\lim\limits_{x\to .} u(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$		0	$+\infty$	
si $\lim\limits_{x\to .} v(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to .} u(x) \times v(x) =$						

Inverse d'une fonction

si $\lim\limits_{x\to .} u(x) =$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0
alors $\lim\limits_{x\to .} \dfrac{1}{u(x)} =$			$+\infty$ ou $-\infty$

$$\begin{cases} \text{si de plus } u(x) > 0 \text{ autour de } ., \text{ alors } \lim\limits_{x\to .} \dfrac{1}{u(x)} = +\infty \\ \text{si de plus } u(x) < 0 \text{ autour de } ., \text{ alors } \lim\limits_{x\to .} \dfrac{1}{u(x)} = -\infty \end{cases}$$

Quotient de deux fonctions

si $\lim\limits_{x\to .} u(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	ℓ	0	$\pm\infty$
si $\lim\limits_{x\to .} v(x) =$	$\ell' \neq 0$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x\to .} \dfrac{u(x)}{v(x)} =$					

Composition

$$\begin{array}{ccccc} x & \mapsto & u(x) & \mapsto & v\circ u(x) \\ & & X & \mapsto & v(X) \end{array}$$

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \ell_1 \\ \lim\limits_{X\to\ell_1} v(X) = \ell_2 \end{cases}, \text{ alors } \lim\limits_{x\to\alpha} v\Big(u(x)\Big) = \lim\limits_{X\to\ell_1} v(X) = \ell_2.$$

Exemples : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x} + 2}$

3) Encadrements, comparaison

Théorème des gendarmes.

f, g et h trois fonctions définies sur un même intervalle I, avec pour tout x de I : $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x\to\cdot} f(x) = \lim\limits_{x\to\cdot} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to\cdot} g(x) = \ell$.

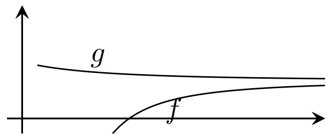
Exemple : on veut déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Sur le même principe, avec des limites infinies :

Théorème : comparaison de limites.

f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x)$:
$\star$ si $\lim\limits_{x\to\cdot} f(x) = +\infty$, alors
$\star$ si $\lim\limits_{x\to\cdot} g(x) = -\infty$, alors
$\star$ si $\lim\limits_{x\to\cdot} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to\cdot} g(x) = \ell'$, alors

Attention : dans la dernière $\star$ même si $f(x) < g(x)$, alors $\ell \leqslant \ell'$.
sur le dessin ci-contre, $f(x) < g(x)$, pourtant elles ont la même limite



Exemple : $f(x) = x^2 + e^{3x-7}$, quelle est sa limite en $+\infty$?

4) Formes indéterminées : limites particulières

• **Forme « $\frac{0}{0}$ » :** il peut s'agir d'une limite de taux d'accroissement, quelques cas à retenir.

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1}$

• **Polynômes et fractions de polynômes en $\pm\infty$:** on factorise par le terme de plus haut degré.

$\star$ $\lim\limits_{x\to +\infty} -2x^3 + 3x^2 + 11x - 7$?

$\star$ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x-4}{x^2+11x-12}$?

- **Théorème des croissances comparées.**

Pour tout $n > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\ln(x)} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0$.

De même avec la racine carrée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x) = 0$.

Et pour toute fonction polynomiale P : $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)e^x = 0$.

Exemples :

Les formes indéterminées sont ....

⋆ pour « $\infty - \infty$ », on peut ....

....

⋆ pour « $\frac{\infty}{\infty}$ », ...

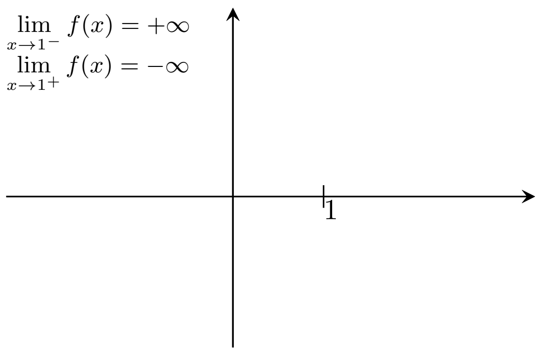
⋆ pour « $\frac{0}{0}$ », on peut ....

....

Exemples : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{-7x + 21}$$

5) Asymptotes

verticale	horizontale
asymptote d'équation $x = a$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	asymptote d'équation $y = \ell$ en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ 	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$