Pratiques calculatoires autour des fonctions
E - Primitives

I. Qu'est-ce qu'une primitive ?

Définition.
Soient f et F deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$.
On dit que F est une ***primitive*** de f si F est dérivable et $F' = f$.

Propriété.
Si F est une primitive de f sur $\mathcal{D}$, alors toutes les fonctions $x \mapsto F(x) + C$ sont des primitives de f sur I, et toutes les primitives s'écrivent ainsi.

II. Trouver des primitives

1) Primitives usuelles

On peut reconnaître des formes, et utiliser les formules de dérivées correspondantes :

forme à reconnaître		formule de dérivée à utiliser	
x^k	$\rightsquigarrow$	$x^n \xrightarrow{\text{a pour dérivée}} nx^{n-1}$	on augmente l'exposant de 1 pour trouver une primitive : $n = k+1$
$\ldots \times (u(x))^k$	$\rightsquigarrow$	$\big(u(x)\big)^n \xrightarrow{\text{a pour dérivée}} nu'(x)\big(u(x)\big)^{n-1}$	
$\dfrac{\ldots}{x^k}$	$\rightsquigarrow$	$\dfrac{1}{x^n} \xrightarrow{\text{a pour dérivée}} \dfrac{-n}{x^{n+1}}$	on diminue l'exposant de 1 pour trouver une primitive : $n = k-1$
$\dfrac{\ldots}{(u(x))^k}$	$\rightsquigarrow$	$\dfrac{1}{\big(u(x)\big)^n} \xrightarrow{\text{a pour dérivée}} \dfrac{-nu'(x)}{\big(u(x)\big)^{n+1}}$	lorsque $u(x) \neq 0$
$\dfrac{\ldots}{x}$	$\rightsquigarrow$	$\ln(\lvert x\rvert) \xrightarrow{\text{a pour dérivée}} \dfrac{1}{x}$	on remarque que la dérivée de $\ln(-x)$ est
$\dfrac{\ldots}{u(x)}$	$\rightsquigarrow$	$\ln\big(\lvert u(x)\rvert\big) \xrightarrow{\text{a pour dérivée}} \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	lorsque $u(x) \neq 0$
$\dfrac{\ldots}{\sqrt{x}}$	$\rightsquigarrow$	$\sqrt{x} \xrightarrow{\text{a pour dérivée}} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\dfrac{\ldots}{\sqrt{u(x)}}$	$\rightsquigarrow$	$\sqrt{u(x)} \xrightarrow{\text{a pour dérivée}} \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	lorsque $u(x) > 0$
e^x	$\rightsquigarrow$	$e^x \xrightarrow{\text{a pour dérivée}} e^x$	
$\ldots \times e^{u(x)}$	$\rightsquigarrow$	$e^{u(x)} \xrightarrow{\text{a pour dérivée}} u'(x)e^{u(x)}$	
$\ldots \times \cos(u(x))$	$\rightsquigarrow$	$\sin(u(x)) \xrightarrow{\text{a pour dérivée}} u'(x)\cos(u(x))$	
$\ldots \times \sin(u(x))$	$\rightsquigarrow$	$\cos(u(x)) \xrightarrow{\text{a pour dérivée}} -u'(x)\sin(u(x))$	

2) Primitive d'une somme et d'un produit par un réel

F et G sont des primitives de deux fonctions f et g

⋆ $F+G$ est une primitive de $f+g$ (car $(F+G)' = F' + G' = f + g$).

⋆ $2F$ est une primitive de $2f$; 0,5F de 0,5f ...etc ... : aF est une primitive de af (car ....).

Attention : ce n'est pas aussi simple avec un produit : $F \times G$ n'est pas une primitive de $f \times g$.
En effet, $(F \times G)' = F'G + FG'$ (et non $F'G'$).

Exemple : $f(x) = 7x^2 + 3x + \frac{1}{x}$:

3) Méthode et disposition pratique pour éviter les erreurs de coefficients

Exemple : cherchons les primitives de $f(x) = x(x^2-1)^3$.

Cette fonction est sous la forme d'une puissance, $(x^2-1)^3$, multipliée avec x, qui ressemble à la dérivée de $x^2 - 1$ à peu près.

	Primitives		*Dérivées*	
La formule que l'on utilise est donc :	$(u(x))^4$	$\xrightarrow{\text{a pour dérivée}}$	$4u'(x)(u(x))^3$	avec $u(x) = x^2 - 1$, $u'(x) = 2x$
On remplace $u(x)$ et $u'(x)$:	$(x^2-1)^4$		$4 \times 2x(x^2-1)^3$	$\div 8$
On ajuste le coefficient :	$\boxed{\frac{1}{8}(x^2-1)^4}$	$\xleftarrow{\text{a pour primitive}}$	$x(x^2-1)^3$	

Les primitives de f sont donc les fonctions $\boxed{x \mapsto \frac{1}{8}(x^2-1)^4 + C}$.

Étapes de la méthode :

1. Identifier la formule de dérivation à utiliser, et le $u(x)$, et l'écrire en 1ère ligne du « tableau » ;
2. remplacer le $u(x)$ et le $u'(x)$, et le n le cas échéant ;
3. à partir du résultat de la formule, on cherche à retrouver la fonction de départ au bas de la colonne de droite, par des multiplications et des divisions par des nombres qui ne contiennent pas de x. Si on n'y arrive pas, c'est que l'on s'est trompé de formule de départ, ce n'est pas grave, on retente notre chance avec une autre formule (ajuster le n éventuellement).

Attention : les opérations d'une ligne à l'autre doivent préserver le lien primitives-dérivées des colonnes.
Donc on ne peut que multiplier ou diviser par un <u>nombre</u>, pas de x !

Si la fonction à primitiver est une somme, <u>primitiver séparément chaque terme</u> (si besoin avec la méthode ci-dessous), puis ajouter les primitives obtenues.

Exercice : donner les primitives de la fonction f d'expression $f(x) = \frac{x}{(3x^2+7)^5} + \frac{2}{x}$.