Pratiques calculatoires autour des fonctions
D - Signes et inégalités

I. Signes et inégalités

1) Tableaux de signes

On utilise un tableau de signes pour étudier le signe d'une expression sous la forme d'un produit ou quotient de plusieurs expressions dont on sait étudier les signes (polynômes par exemple ...).

1. Étudier séparément le signe de chaque facteur.

2. Construire un tableau avec une ligne pour x, et une ligne pour chaque facteur, et la dernière ligne pour l'expression complète.

3. La dernière ligne s'obtient par application de la règle des signes.

Attention :
- Dans la ligne des x, bien ranger les nombres dans l'ordre croissant (avant de mettre les signes dans les lignes des facteurs).
- Le produit d'un nombre avec 0 fait 0 de même que le quotient de 0 par un nombre non nul (0 au numérateur).
- Le quotient d'un nombre par 0 (au dénominateur) n'est pas défini, on met alors une double barre dans le tableau sous cette valeur.

Remarque : pour étudier le signe d'une somme, on peut la factoriser, ou mettre au même dénominateur, pour ensuite faire un tableau de signes.

Exemple : $f(x) = x + 5 - \frac{12}{x+1}$

2) Inégalités et opérations

- On peut ***ajouter*** membre à membre deux inégalités :

$$\boxed{\text{si } \begin{cases} x \leqslant y \\ x' \leqslant y' \end{cases} \quad \text{alors} \quad x + x' \leqslant y + y'}.$$

- Si tous les termes sont positifs, on peut ***multiplier*** membre à membre deux inégalités :

$$\boxed{\text{si } \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant x' \leqslant y' \end{cases} \quad \text{alors} \quad xx' \leqslant yy'}.$$

- Le sens de l'inégalité est conservé lorsque :
  - ⋆ ....
  - ⋆ ....
  - ⋆ ....

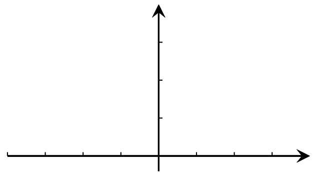
- Le sens de l'inégalité est inversé lorsque :
  - ⋆ ....
  - ⋆ ....

Cas particuliers :

- inégalité et carré :
  Si a et b sont positifs, alors : $a < b$ est équivalent à $a^2 < b^2$.

- inégalité et inverse :
  Avec a et b de même signe : $0 < a < b$ est équivalent à $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.
  $a < b < 0$ est équivalent à $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} < 0$.

II. Valeur absolue



Définition.

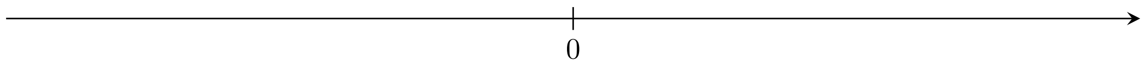
Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la ***valeur absolue*** de x par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$.

Exemples : $|-2{,}7| = \dots$; $|5{,}4| = \dots\dots$; $|17-41| = \dots\dots\dots$; $|11-x| = \dots\dots\dots$

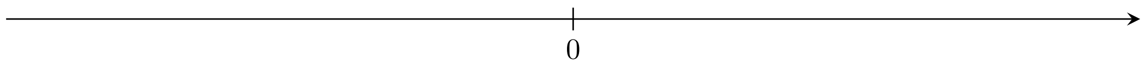
En fait, $\boxed{\text{la valeur absolue d'un nombre représente la distance entre ce nombre et } 0}$, comme si on la mesurait avec une règle. C'est donc toujours un nombre positif.

• Ainsi en particulier $|-x| = |x|$, car ....

....



• $|x| = 2$ signifie que la distance entre x et 0 est 2, donc $\boxed{|x| = 2 \iff x = 2 \text{ ou } x = -2}$.
$|x| \leqslant 2$ signifie que la distance entre x et 0 est plus petite que 2, donc $\boxed{|x| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2}$.
$|x| \geqslant 2$ signifie que la distance entre x et 0 est plus grande que 2, donc $\boxed{|x| \leqslant 2 \iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$.



• De la même façon, $\boxed{|a-b| \text{ mesure la distance entre } a \text{ et } b}$, en particulier, $|a-b| = |b-a|$.
Par exemple $|2-3| = \dots$, $|3-2| = \dots$.
• Ainsi, $|x-3| \leqslant 1$ signifie que la distance entre x et 3 est plus petite que 1, soit $3-1 \leqslant x \leqslant 3+1$.

Exercice : résoudre $|2x-1| \leqslant 3$.

Propriétés.

Pour tous les réels x et y :

- $\boxed{|xy| = \dots\dots\dots}$ et, pour $y \neq 0$, $\boxed{\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dots\dots}$
- $|x+y| \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (***inégalité triangulaire***)
- $\sqrt{x^2} = \dots$

Exemples : $\sqrt{3^2} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ et $\sqrt{(-4)^2} = \dots$