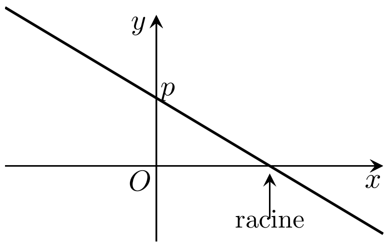
Pratiques calculatoires autour des fonctions
C - Polynômes

I. Polynômes de degré 1 : fonctions affines $x \mapsto mx + p$

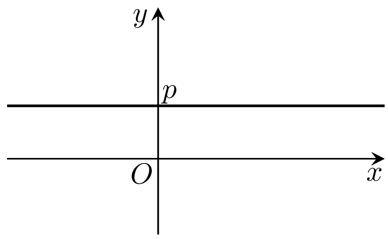
m est ....

$m < 0$



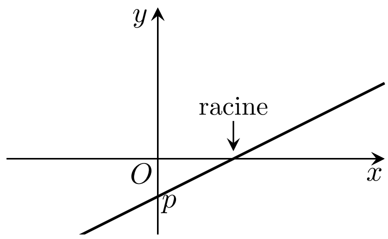
x	$-\frac{p}{m}$
$mx+p$	$+ \quad 0 \quad -$

$m = 0$



x	
$mx+p$	signe de p

$m > 0$



x	$-\frac{p}{m}$
$mx+p$	$- \quad 0 \quad +$

II. Polynômes de degré 2 : $x \mapsto ax^2 + bx + c$

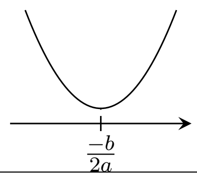
On note Δ le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Racines de P	pas de racine réelle	une seule racine : $-\dfrac{b}{2a}$	deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Factorisation de $P(x)$	pas de factorisation dans $\mathbb{R}$	$P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$	$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

Signe de $P(x)$

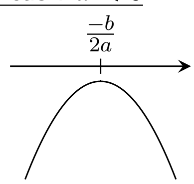
$\Delta < 0$

1er cas : $a > 0$



x	$-\infty \qquad +\infty$
$P(x)$	$+$

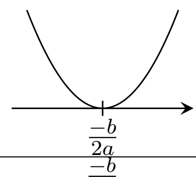
2ème cas : $a < 0$



x	$-\infty \qquad +\infty$
$P(x)$	$-$

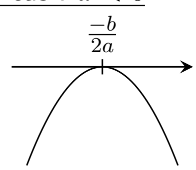
$\Delta = 0$

1er cas : $a > 0$



x	$\frac{-b}{2a}$
$P(x)$	$+ \quad 0 \quad +$

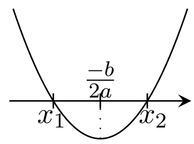
2ème cas : $a < 0$



x	$\frac{-b}{2a}$
$P(x)$	$- \quad 0 \quad -$

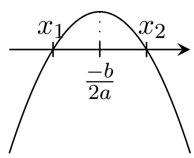
$\Delta > 0$

1er cas : $a > 0$



x	$x_1 \qquad x_2$
$P(x)$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

2ème cas : $a < 0$



x	$x_1 \qquad x_2$
$P(x)$	$- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$

Remarque : si $\Delta < 0$, le polynôme a deux racines complexes conjuguées, les formules et la factorisation sont les mêmes que dans le cas $\Delta > 0$, mais en remplaçant $\sqrt{\Delta}$ par $i\sqrt{-\Delta}$.

III. Polynômes de degré 3

Pour des polynômes de degré 3 (ou plus), il n'existe pas de formules analogues au Δ, x_1, x_2, on ne peut donc pas factoriser facilement. Le but de cette partie est de voir deux méthodes pour pouvoir factoriser quand même des polynômes de degré trois, à condition de connaître une racine.

Lorsque l'on ne connaît pas de racine, on peut essayer d'en trouver une « évidente » parmi 0, 1, -1, 2, -2 ... (on calcule les images de ces valeurs).

Propriété.

Si x_1 est racine d'un polynôme P, alors P est factorisable par $(x - x_1)$, c'est-à-dire que l'on peut écrire P sous la forme $P(x) = (x - x_1)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme.
Le degré de Q est un de moins que le degré de P.

Reste à déterminer les coefficients de Q.

1) Première méthode : par identification des coefficients

Exemple : $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 34x + 30$. P est un polynôme de degré 3, on va chercher toutes ses racines et le factoriser.
$P(1) =$

2) Deuxième méthode : par division euclidienne

Cette méthode est basée sur le même principe que la division des nombres entiers.