Pratiques calculatoires autour des fonctions

A - Généralités et structure

Les fonctions ont été introduites en mathématiques vers la fin du XVII$^{\text{è}}$ siècle par Leibniz, puis ont été développées entre autres par Euler, Cauchy ... La définition a évolué au fil du temps, et l'étude des fonctions forme le domaine de l'*analyse*.

Une fonction f est définie par la donnée de deux éléments :
⋆ un procédé pour déterminer une image (en général un calcul à faire) ;
⋆ l'ensemble des nombres pour lesquels on peut appliquer ce procédé, c'est l'***ensemble de définition***, noté en général $\mathcal{D}_f$.

Exemple : la fonction f dont l'expression est $f(x) = \frac{2}{x-4}$ est définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[$ car diviser deux nombres est toujours possible sauf lorsque le diviseur est nul, et ici $x-4$ s'annule lorsque $x = 4$.

On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque : $f(x) = \frac{2}{x-4}$ se note aussi $f : x \mapsto \frac{2}{x-4}$.
On dit « f est la fonction qui à x associe $\frac{2}{x-4}$ » ou « par la fonction f, x a pour image $\frac{2}{x-4}$ ».

I. Rappels sur les intervalles

• **Un intervalle** est un ensemble de nombres réels compris entre deux valeurs.

Par exemple $x \in [-\frac{3}{7}; 7{,}4[$ signifie ......x...... : $\longrightarrow$

$]-\infty; 3]$ est l'ensemble des nombres .... : $\longrightarrow$

⋆ L'intervalle $[a; b]$ est dit ***fermé*** car ses ***bornes*** a et b sont comprises dans l'intervalle.
On l'appelle aussi un ***segment***. a ... $[a, b]$ se lit « a appartient au segment $[a, b]$ ».
⋆ L'intervalle $]a; b[$ est dit ***ouvert*** car ses bornes ne sont pas comprises dans l'intervalle : a......$]a; b[$, b......$]a; b[$.

Propriété de caractérisation des intervalles.

Soit I un sous ensemble de $\mathbb{R}$.
I est un intervalle si et seulement si pour tous éléments a et b de I tels que $a < b$, alors $[a, b] \subset I$.

• **Intersection et réunion :**
Si I et J sont deux ensembles de nombres, l'intersection de I et J est l'ensemble des nombres qui sont à la fois dans I et dans J, on le note $I \cap J$. « I inter J »
La ***réunion*** de I et de J, notée $I \cup J$ (« I union J »), est l'ensemble des nombres qui sont dans I, ou dans J ou dans les deux à la fois.
$I = [3; 7]$ et $J =]-2; 4[$: $\longrightarrow$

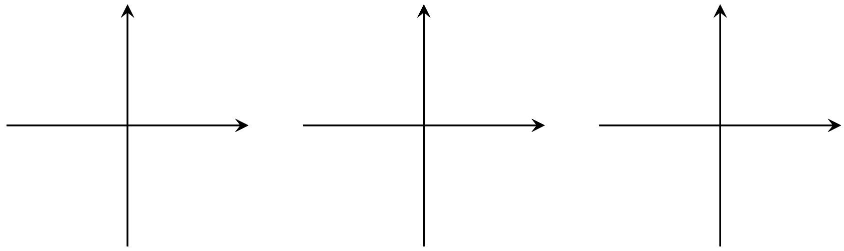
• **Notation** $\mathbb{R}$ **:** on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire $\boxed{\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[}$.
Alors $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ peut se noter $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ (« $\mathbb{R}$ privé de 0 ») ou $\mathbb{R}^*$ (« $\mathbb{R}$ étoile »).
De même, $]-\infty; -4[\cup]-4; 3[\cup]3; +\infty[$ se note $\mathbb{R}\backslash\{-4; 3\}$ et se lit « ensemble des nombres réels, privé de -4 et 3 ».
On note également $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ « ...
$\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$, « .

II. Fonctions usuelles connues

fonctions de référence :

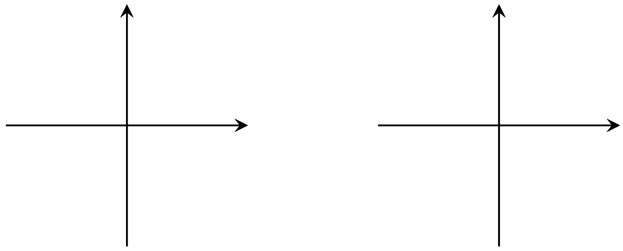
⋆ puissances :

. . . .



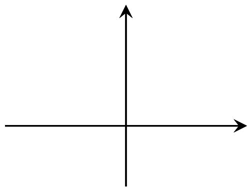
⋆ inverses de puissances :

. . . .



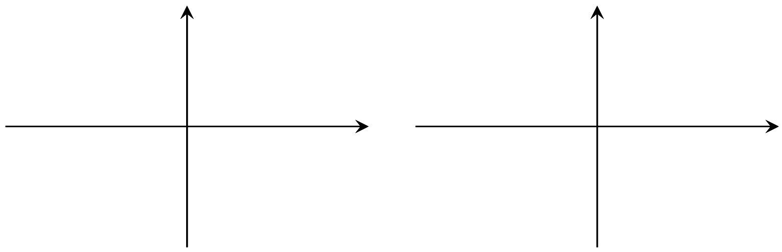
⋆ racine carrée :

. . . .



⋆ cosinus et sinus :

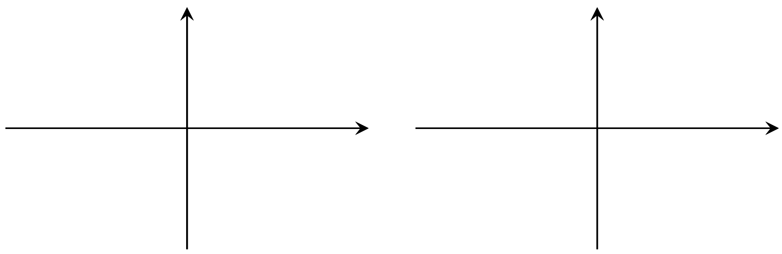
. . . .



⋆ logarithme et exponentielle :

. . . .

. . . .



grandes familles de fonctions usuelles :

⋆ polynômes : . . . .

. . . .

⋆ fractions rationnelles : . . . .

. . . .

. . . .

III. Structure d'une fonction

1) Addition, soustraction, produit, division de fonctions

On peut former de nouvelles fonctions en ajoutant, soustrayant ... des fonctions usuelles. Par exemple, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ est la somme de la fonction carré et de la fonction inverse.
De même, la fonction $g(x) = \frac{\ln(x)}{2x-8}$ est ...

Les fonctions $u+v$, $u-v$ et $u \times v$ sont définies ... La fonction $\frac{u}{v}$ est définie ...

Exemples :

- $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

- $g(x) = \frac{\ln(x)}{2x-8}$

2) Composition de fonctions

Définition.
Soient u et v deux fonctions.
On appelle ***composée de*** u ***par*** v la fonction notée $v \circ u$ d'expression $v \circ u(x) = v(u(x))$.
Elle est définie pour tous les x de $\mathcal{D}_u$ tels que $u(x) \in \mathcal{D}_v$.

Exemples :

- $u(x) = 2x - 7$ et $v(x) = e^x$.

$$\begin{array}{ccccc} x & \mapsto & 2x-7 & \mapsto & e^{2x-7} \\ & & X & \mapsto & e^X \end{array}$$

- $u(x) = 2x - 7$ et $w(x) = \dfrac{1}{x}$: déterminer $u \circ w$ et $w \circ u$ ainsi que leurs ensembles de définitions.

- décomposer les fonctions suivantes en deux fonctions usuelles.
  ⋆ $f(x) = \ln(x^2 + 3)$

  ⋆ $g(x) = \dfrac{1}{-3x + 5}$

  ⋆ $h(x) = -\dfrac{4}{x^2} + 2$

Remarque importante : même si $u \circ v$ et $v \circ u$ existent toutes les deux, elles ne sont pas égales.

Propriété.

Soient u et v deux fonctions telles que $v \circ u$ soit défini.
Si u et v sont dérivables sur leurs ensembles de définition, alors $v \circ u$ est dérivable et $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$.

Exemples : $r(x) = \ln(3x - 4)$

3) Méthode pour déterminer les ensembles de définition

1. Identifier la structure (opération, composition ...) de la fonction, et les fonctions de référence qui interviennent (notées ici u et v).

2. ➤ $u + v$ ou $u - v$ ou $u \times v$: déterminer $\mathcal{D}_u$, $\mathcal{D}_v$ et prendre l'intersection.

➤ $\dfrac{u}{v}$: déterminer $\mathcal{D}_u$, $\mathcal{D}_v$ et résoudre $v(x) = 0$.

➤ $v \circ u$: déterminer $\mathcal{D}_u$ et résoudre $u(x) \in \mathcal{D}_v$.