Logarithme, exponentielle, puissances.

Exercice 4.

Pour $h : x \mapsto -x+5+\ln(|1-x|)$

- $x \mapsto |1-x|$ est définie sur $\mathbb{R}$, et elle est composée par ln définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.
  Or pour tout x, $|1-x| \geqslant 0$ et $|1-x| = 0 \iff x = 1$.
  Donc $x \mapsto \ln(|1-x|)$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
  et $x \mapsto -x+5$ est définie sur $\mathbb{R}$.
  Donc $\boxed{\mathcal{D}_h = \mathbb{R}\backslash\{1\}}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} |1-x| = +\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(|1-x|) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$
  Et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x+5 = +\infty$.
  Donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty}$.
- $\lim\limits_{x\to1} |1-x| = 0$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to1} \ln(|1-x|) = \lim\limits_{X\to0} \ln(X) = -\infty$.
  Donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to1} h(x) = -\infty}$.
- en $+\infty$, $h(x) = x\left(-1+\frac{5}{x}+\frac{\ln(x-1)}{x-1}\times\frac{x-1}{x}\right)$.
  $\star$ $\lim\limits_{x\to+\infty} -1+\dfrac{5}{x} = -1$
  $\star$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$ par le théorème des croissances comparées
  et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x} = 1$
  $\star$ donc par produit puis somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} -1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{\ln(x-1)}{x-1}\times\dfrac{x-1}{x} = -1$
  Puis par produit avec x, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

- $(\ln(|u|))' = \frac{u'}{u}$ donc $f'(x) = -1+\frac{-1}{1-x} = \frac{-2+x}{1-x}$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-2+x$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$h'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Pour $k : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$:

- k est un quotient, le numérateur est défini sur $\mathbb{R}$, le dénominateur est défini sur $]0,+\infty[$ et s'annule en $x=1$.
  Donc $\boxed{\mathcal{D}_k =]0,1[\cup]1,+\infty[}$.

- $\lim\limits_{x\to0} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$ donc par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to0} k(x) = 0}$.
- $\star$ $\lim\limits_{x\to1} x = 1$
  $\star$ $\lim\limits_{x\to1} \ln(x) = 0$
  pour $x < 1$, $\ln(x) < 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to1^-} k(x) = -\infty}$
  pour $x > 1$, $\ln(x) > 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+} k(x) = +\infty}$

- $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty}$ par le théorème des croissances comparées.
- $k'(x) = \frac{1\ln(x) - x\times\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}$.
  Or $\ln(x) - 1 > 0 \iff \ln(x) > 1 \iff x > e$ car exp est croissante.
  Donc

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x)-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(\ln(x))^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$k'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$k(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 7.

Pour $h(x) = e^{x^2}$:

- h est la composée de deux fonctions usuelles définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = \boxed{+\infty}$.
  De même, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty}$.
- $h'(x) = 2xe^{x^2}$. Et pour tout x, $e^{x^2} > 0$.
  Donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $k(x) = (7x+4)e^{-x}$:

- k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de deux fonctions usuelles).
- $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = -\infty}$ (produit)
- $k(x) = 7\frac{x}{e^x} + \frac{4}{e^x}$.
  Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ par le théorème des croissances comparées, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{e^x} = 0$ par inverse.
  Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 0}$.
- $k'(x) = 7e^{-x} - (7x+4)e^{-x} = (-7x+3)e^{-x}$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{7}$		$+\infty$
$-7x+3$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$7e^{-\frac{3}{7}}$	$\searrow$	0

$-7x+3 > 0 \iff -7x > -3 \iff x < \frac{3}{7}$

$k(\frac{3}{7}) = (7\times\frac{3}{7}+4)e^{-\frac{3}{7}} = 7e^{-\frac{3}{7}}$

Exercice 14.

$f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$. On utilise la formule $(e^u)' = u'e^u$ avec $u(x) = x\ln(x)$ donc $u'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times 1x = \ln(x) + 1$

Donc $f'(x) = (\ln(x) + 1)e^{x\ln(x)}$.

Or $\ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > e^{-1}$ car exp est strictement croissante.

Donc

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées, donc par composition, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{X\to 0} e^X = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$
- $f(e^{-1}) = (e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-1\times e^{-1}} = e^{-e^{-1}}$ (ou $f(e^{-1}) = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$).

Tangente en 1 : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Or $f'(1) = 1e^{1\times\ln(1)} = 1$ et $f(1) = 1^1 = 1$.

Et $1(x-1) + 1 = x$.

Donc une équation de la tangente est $\boxed{y = x}$