# Logarithme népérien, exponentielle et puissances.

En 1614, John Neper propose une nouvelle méthode de calcul, qui permet, en remplaçant les nombres par leurs *logarithmes* (de *logos* : raison, rapport, et *rythmos* : nombres), de n'utiliser que des additions, soustractions, et divisions par 2 ou 3. Puis Leibniz et surtout Newton donneront une autre approche du logarithme en s'intéressant à la fonction.

La fonction exponentielle est liée aux problèmes des exposants non entiers, étudiés depuis l'antiquité. C'est principalement Euler qui définit le nombre « $e$ », et formalise la fonction exponentielle. Cette fonction occupe une place capitale dans les équations différentielles.

## I. Fonction logarithme népérien

### 1) Définition et propriétés algébriques

**Définition.**

La fonction ***logarithme népérien***, notée ln est définie sur $]0;+\infty[$, et c'est l'unique primitive de la fonction inverse qui prend la valeur 0 pour $x = 1$ :

$$\forall x \in ]0,+\infty[,\ \ln'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } \ln(1) = 0.$$

**Théorème.**

Pour tous nombres réels strictement positifs $a$ et $b$ :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Par conséquent, pour tous réels strictement positifs $a$ et $b$ et tout nombre entier relatif $n$ :

$\ln(a^n) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ ; $\ln(\sqrt{a}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ ; $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ ; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

**Quelques démonstrations :** voir exercice 1.

**Exemples :** $\ln(6) - \ln(3) =$

$\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) =$

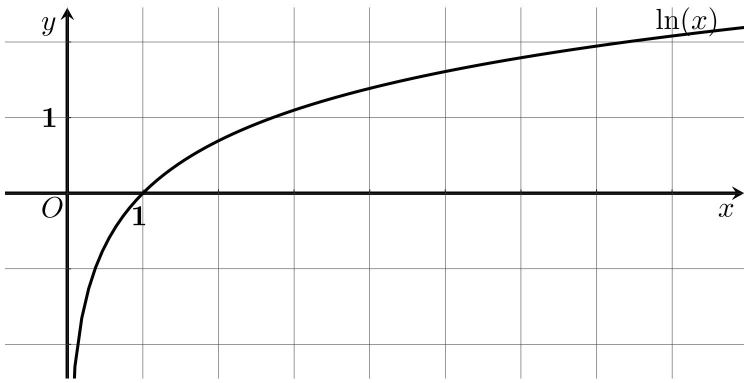
### 2) Propriétés de la fonction logarithme népérien

**Dérivabilité :** la fonction ln est dérivable sur ...

Et pour toute fonction $u$ définie et dérivable sur un intervalle $I$, et qui ne s'annule pas sur $I$, la fonction composée $\ln(|u|)$ est dérivable sur $I$ et $\boxed{(\ln(|u|))' = \frac{u'}{u}}$

**Variations et courbe :**

| $x$ | $0$ $+\infty$ |
|---|---|
| $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ | |
| $\ln(x)$ | |




La courbe représentative de la fonction ln a pour asymptote ............................................

**Conséquence :** la fonction ln est une bijection strictement croissante de ..................................

**Valeurs remarquables :**
$\ln(1) = \ldots$

$\boxed{\text{On note } e \text{ l'unique antécédent de 1 par ln : } e \approx 2,718, \text{ et } \ln(e) = \ldots.}$

**Limites remarquables :**

⋆ D'après la courbe, $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \ldots\ldots}$ et $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = \ldots\ldots}$.

⋆ Limite issue d'un taux d'accroissement $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1}$.

⋆ Limites issues du th. des croissances comparées : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = \ldots \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{\ln(x)} = \ldots}$

## II. Fonction exponentielle

### 1) Définition et ses conséquences

La fonction ln réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$.

Donc elle admet une réciproque, que nous appellerons ***exponentielle***, définie sur $\ldots$.

**Définition.**
La fonction ***exponentielle*** notée exp est la réciproque de la fonction ln.
C'est-à-dire : $\exp : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & ]0;+\infty[ \\ x & \mapsto & y \text{ tel que } \ln(y) = x \end{array}$ (autrement dit $y$ est l'antécédent de $x$ par ln)
On note aussi $\exp(x) = e^x$.

**Conséquences directes de la définition :**

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in \ldots\ldots \text{ et } \forall y \in \ldots\ldots,\ \exp(x) = y \iff x = \ln(y) \\ \forall x \in \ldots\ldots,\ \ln\big(\exp(x)\big) = x \ \text{ soit } \ \ln(e^x) = x \\ \forall x \in \ldots\ldots,\ \exp\big(\ln(x)\big) = x \ \text{ soit } \ e^{\ln(x)} = x \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0 \ \text{ soit } \ e^x > 0. \end{array}}$$

Et la fonction exp est une bijection strictement croissante de ..............................................

### 2) Propriétés algébriques

Les fonctions exponentielle et logarithme étant les réciproques l'une de l'autre, les propriétés algébriques sont « inversées ».

**Propriété.**
Pour tous nombres réels $a$ et $b$ :

$$e^{a+b} = \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par conséquent, pour tous réels $a$ et $b$ et pour tout entier relatif $n$ :

$$e^{na} = \ \ldots\ldots \ ; \ e^{\frac{1}{2}a} = \ \ldots\ldots \ ; \ e^{-b} = \ \ldots\ldots \ ; \ e^{a-b} = \ \ldots\ldots$$

Il s'agit des règles classiques déjà connues sur les puissances entières (et qui justifient donc la notation puissance de la fonction exponentielle).

**Exercice :** simplifier les expressions suivantes.

$\ln(e^{-5}) =$ $\qquad$ $e^{\ln(\sqrt{2})} =$ $\qquad$ $e^{5\ln(2)} =$

$e^{-\ln(5)} =$ $\qquad$ $\ln(3e^2) =$ $\qquad$ $e^{\ln(6)-\ln(10)} =$

### 3) Propriétés de la fonction exponentielle

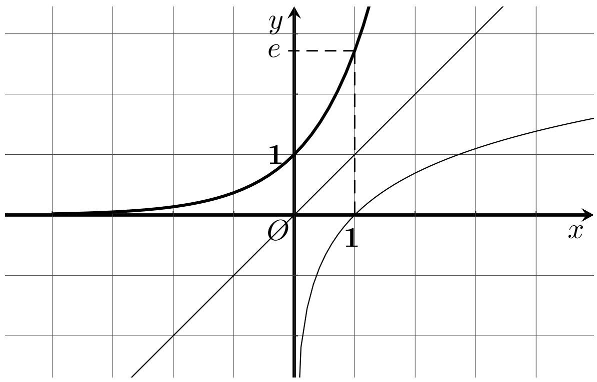
**Propriété.**

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même : $\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}$.
Et si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$, alors la fonction composée $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur $I$ et $\boxed{(\exp(u))' = u' \exp(u)}$.

**Démonstration :**

**Variations et courbe :**

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $\exp(x)$ | |




La courbe représentative de la fonction exponentielle a pour asymptote ...

**Valeurs remarquables :**

$\exp(0) = \ldots$ et $\exp(1) = \ldots$

$e^0 = \ldots$ et $e^1 = \ldots.$

**Limites remarquables :**

$\star$ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \ldots\ldots}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = \ldots\ldots}$.

$\star$ Limite issue du taux d'accroissement en 0 : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1}$.

$\star$ Limites issues du théorème des croissances comparées : pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty}$.

## III. Puissances d'exposant réel

Pour $a > 0$, $e^{5\ln(a)} =$ ...........

### 1) Définition et propriétés algébriques d'une puissance d'exposant réel

**Définition.**

Pour tout $a > 0$ et tout $b$ réel, on appelle « $a$ ***puissance*** $b$ » et on note $a^b$ le réel strictement positif défini par $a^b = e^{a\ln(b)}$.

**Remarque :** si $b$ est entier, $a^b$ correspond à la définition usuelle d'une puissance entière : $a^b = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{b \text{ facteurs}}$.

Les formules connues avec les puissances entières, et avec l'exponentielle, sont vraies aussi avec des puissances non entières, à condition que la variable soit strictement positive.
(voir bilan page 6)

**Exemples :** pour $x > 0$, $x^{-0,2}x^{4,2} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $x^{-2,7}x^{2,7} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ .

$(5^3)^{\frac{1}{3}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

### 2) Fonctions puissances d'exposants réels

**Définition.**

Pour tout réel $\alpha$, on appelle ***fonction puissance*** $\alpha$ la fonction : $\begin{array}{rcl} ]0,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)} \end{array}$ .

**Exemple :** lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$, pour tout $x$ de $]0;+\infty[$, $x^{\frac{1}{2}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

La fonction « puissance $\frac{1}{2}$ » est donc la fonction $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

**De même,** on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = \dots$

On dit que $x^{\frac{1}{n}}$ est la racine $n$-ième de $x$ et on la note $\sqrt[n]{x}$.

**Exemple :** $64^{\frac{1}{2}} = \dots$ $64^{\frac{1}{3}} = \dots$

$16^{\frac{1}{4}} = \dots$ $16^{\frac{3}{4}} = \dots$ .

**Propriété de dérivabilité.**

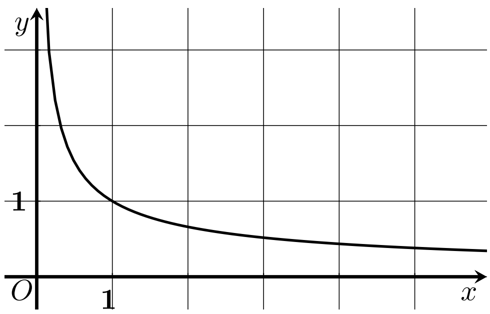
Pour tout nombre réel $\alpha$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0:+\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
(*même formule qu'avec des exposants entiers*)

**Démonstration :**

**Variations, courbe et limites usuelles :**

• **si $\alpha < 0$ :**

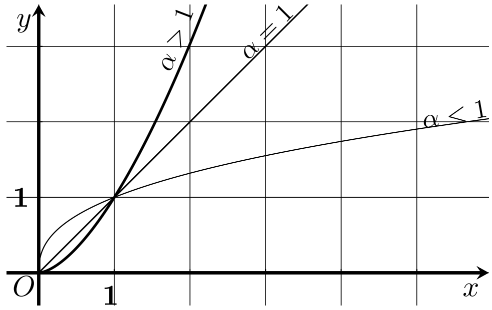
| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| dérivée $\alpha x^{\alpha-1}$ | $\Vert$ | |
| $x^\alpha$ | $\Vert$ | |




• **si $\alpha = 0$ :** $x^0 = \dots\dots\dots\dots$

• **si** $\alpha > 0$ **:**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| dérivée $\alpha x^{\alpha-1}$ | | |
| $x^\alpha$ | | |




Dans ce cas où $\alpha > 0$, puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$, on peut prolonger la fonction en 0 en posant $0^\alpha = 0$.

**Croissances comparées :** le théorème s'applique aussi aux exposants non entiers (mais positifs !) :

$$\boxed{\text{pour } \alpha > 0,\ \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0\ ;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty}.$$

**Exemple :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - \sqrt{x}$

# Ne pas oublier.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\times 2$ | $\times 2$ | | | $\times 2$ | $\times 2$ | $\times 2$ | $\times 2$ | | | $\times 2$ | $\times 2$ | | |
| $\ldots.$ | $2^{-n-1}$ | $2^{-n}$ | $2^{-n+1}$ | $\ldots$ | $2^{-2}$ | $2^{-1}$ | $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ | $\ldots$ | $2^{n-1}$ | $2^n$ | $2^{n+1}$ | $\ldots.$ |
| $\ldots.$ | $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ | $\dfrac{1}{2^n}$ | $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ | $\ldots$ | $\dfrac{1}{4}$ | $\dfrac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ | $\ldots$ | | | | $\ldots.$ |
| | $\div 2$ | $\div 2$ | | | | $\div 2$ | $\div 2$ | | | | $\div 2$ | $\div 2$ | | |

$$2^n = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n \text{ facteurs}}$$

$$2^{-n} = \frac{1}{\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n \text{ facteurs}}}$$