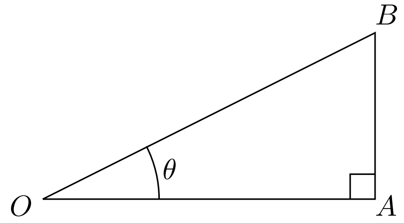
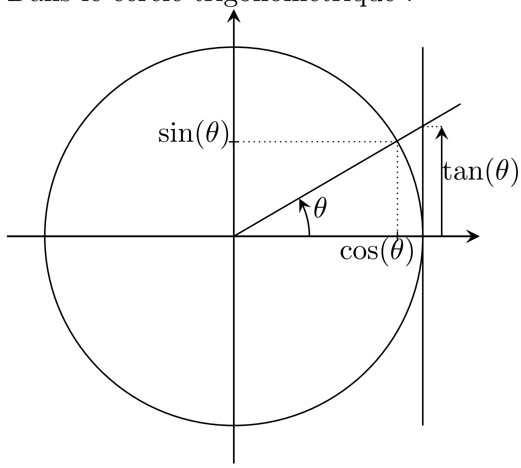
Formules de trigonométrie.

Dans un triangle OAB rectangle en A :



Dans le cercle trigonométrique :



$$\cos(\theta) = \frac{\text{OA}}{\text{OB}} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

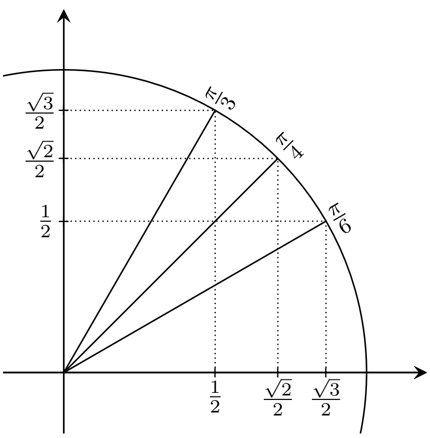
$$\sin(\theta) = \frac{\text{AB}}{\text{OB}} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\text{AB}}{\text{OA}} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

Conséquences directes : $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ et $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

I. Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$					
$\sin(\theta)$					
$\tan(\theta)$					



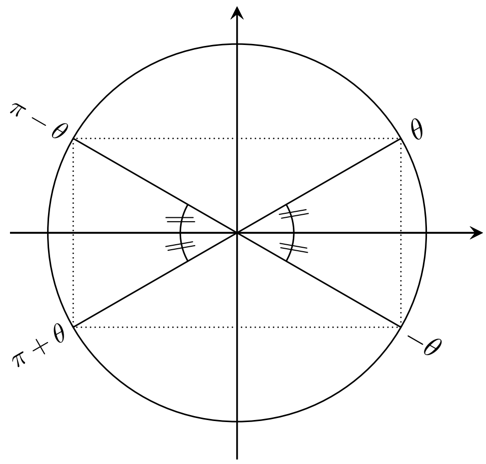
II. Angles associés

$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
donc $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$

Angles supplémentaires : « $\pi + \theta$ et $\pi - \theta$ »

$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
donc $\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$

$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\pi + \theta) - \sin(\theta)$
donc $\tan(\pi + \theta) = \tan(\theta)$



Conséquences : cas d'égalité.

$\cos(\theta) = \cos(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = a + 2k\pi$ ou $\theta = -a + 2k\pi$

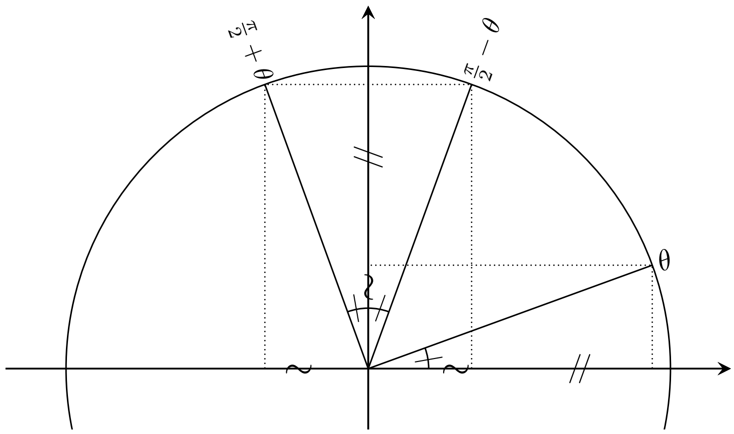
$\sin(\theta) = \sin(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = a + 2k\pi$ ou $\theta = \pi - a + 2k\pi$

$\tan(\theta) = \tan(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = a + k\pi$

Angles complémentaires : « $\frac{\pi}{2}+\theta$ et $\frac{\pi}{2}-\theta$ »

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\theta)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(\theta)$
donc $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan(\theta)}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin(\theta)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos(\theta)$
donc $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan(\theta)}$



III. Addition, duplication

(1) $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
(2) $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$

(3) $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
(4) $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$

Pour s'en rappeler :

$$\begin{aligned}
e^{i(a+b)} &= e^{ia}e^{ib}\\
\cos(a+b)+i\sin(a+b) &= \big(\cos(a)+i\sin(a)\big)\big(\cos(b)+i\sin(b)\big)\\
&= \cos(a)\cos(b)+\cos(a)i\sin(b)\\
&\quad + i\sin(a)\cos(b)+i^2\sin(a)\sin(b)\\
&= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\\
&\quad + i\big(\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\big)
\end{aligned}$$

Puis on identifie les parties réelles et imaginaires des deux côtés.

Pour $\cos(a-b)$ *et* $\sin(a-b)$*, on peut remplacer* b *par* $-b$ *dans les formules précédentes.*

Conséquences :

$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$

$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

IV. Produits en sommes, sommes en produits

$\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$ *(par* $(1)+(3)$*)*

$\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$ *(par* $(2)+(4)$*)*

$\sin(a)\sin(b)=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$ *(par* $(3)-(1)$*)*

Conséquences :

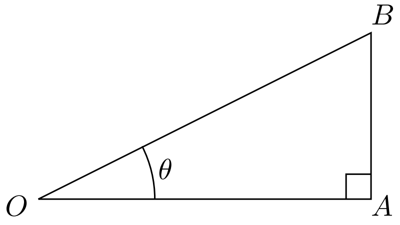
$\cos^2(a)=\frac{1}{2}\left(\cos(2a)+1\right)$ et $\sin^2(a)=\frac{1}{2}\left(1-\cos(2a)\right)$.

$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

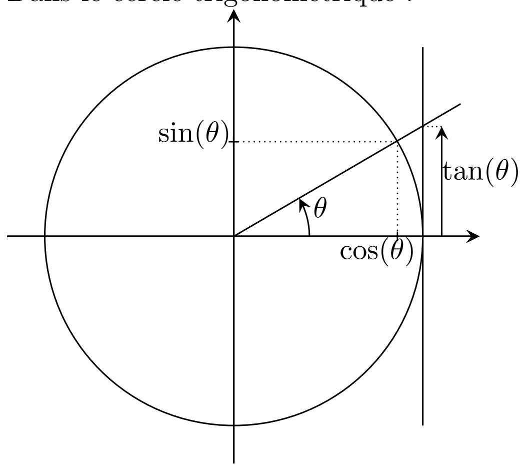
On pose $p=a+b$ *et* $q=a-b$ *dans la série de formules précédentes.*

Formules de trigonométrie.

Dans un triangle OAB rectangle en A :



Dans le cercle trigonométrique :



$$\cos(\theta) = \frac{\text{OA}}{\text{OB}} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

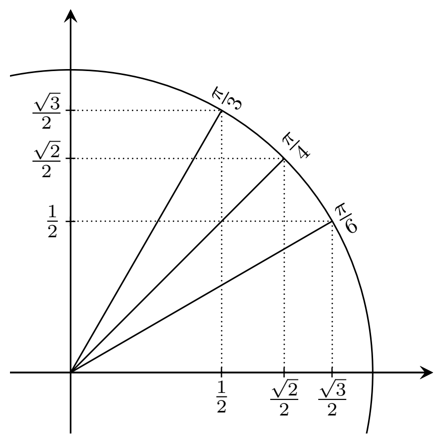
$$\sin(\theta) = \frac{\text{AB}}{\text{OB}} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\text{AB}}{\text{OA}} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

Conséquences directes : $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ et $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

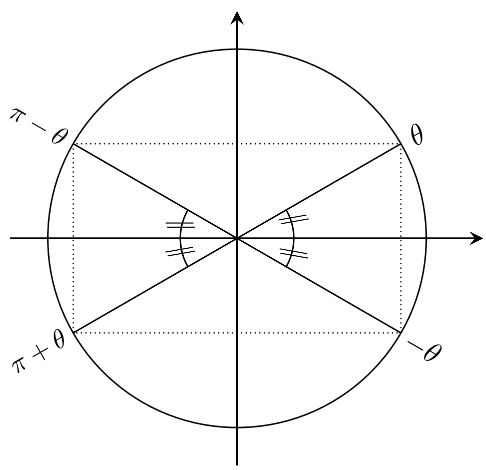
I. Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$					
$\sin(\theta)$					
$\tan(\theta)$					



II. Angles associés

$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
donc $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$



Angles supplémentaires : « $\pi + \theta$ et $\pi - \theta$ »

$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
donc $\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$

$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\pi + \theta) - \sin(\theta)$
donc $\tan(\pi + \theta) = \tan(\theta)$

Conséquences : cas d'égalité.

$\cos(\theta) = \cos(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = a + 2k\pi$ ou $\theta = -a + 2k\pi$

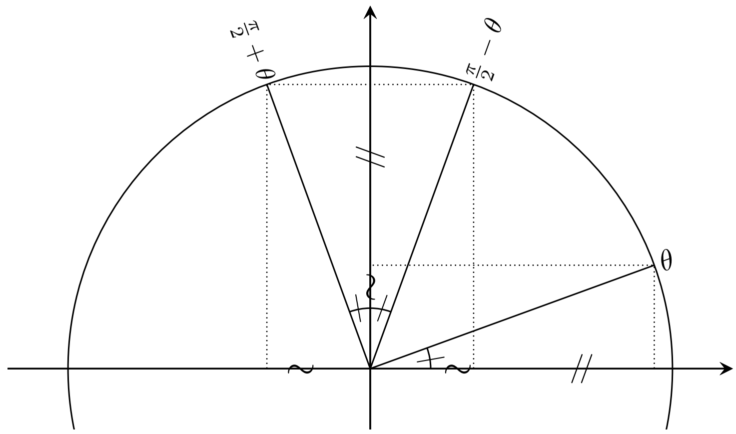
$\sin(\theta) = \sin(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = a + 2k\pi$ ou $\theta = \pi - a + 2k\pi$

$\tan(\theta) = \tan(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = a + k\pi$

Angles complémentaires : « $\frac{\pi}{2}+\theta$ et $\frac{\pi}{2}-\theta$ »

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\theta)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(\theta)$
donc $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan(\theta)}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin(\theta)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos(\theta)$
donc $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan(\theta)}$



III. Addition, duplication

(1) $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
(2) $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$

(3) $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
(4) $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$

Pour s'en rappeler :

$$\begin{aligned}
e^{i(a+b)} &= e^{ia}e^{ib}\\
\cos(a+b)+i\sin(a+b) &= \big(\cos(a)+i\sin(a)\big)\big(\cos(b)+i\sin(b)\big)\\
&= \cos(a)\cos(b)+\cos(a)i\sin(b)\\
&\quad + i\sin(a)\cos(b)+i^2\sin(a)\sin(b)\\
&= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\\
&\quad + i\big(\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\big)
\end{aligned}$$

Puis on identifie les parties réelles et imaginaires des deux côtés.

Pour $\cos(a-b)$ *et* $\sin(a-b)$*, on peut remplacer* b *par* $-b$ *dans les formules précédentes.*

Conséquences :

$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$

$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

IV. Produits en sommes, sommes en produits

$\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$ *(par* $(1)+(3)$*)*

$\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$ *(par* $(2)+(4)$*)*

$\sin(a)\sin(b)=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$ *(par* $(3)-(1)$*)*

Conséquences :

$\cos^2(a)=\frac{1}{2}\left(\cos(2a)+1\right)$ et $\sin^2(a)=\frac{1}{2}\left(1-\cos(2a)\right)$.

$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

On pose $p=a+b$ *et* $q=a-b$ *dans la série de formules précédentes.*