Fonctions circulaires

Exercice 1.

Compléter (lorsque la valeur existe !) le tableau suivant :

θ	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$
$\cos(\theta)$							
$\sin(\theta)$							
$\tan(\theta)$							

Exercice 2.

1. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en utilisant des formules de trigonométrie.

2. En déduire une expression simple de $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$.

Exercice 3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi[$:

(a) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1$

(c) $\sin(x) - \sin(3x + \frac{\pi}{4}) = 0$

(d) $\sin(2x) = \cos(x)$

(e) $\sin(2x) = \tan(x)$

(f) $\tan(x + \frac{\pi}{3}) + \tan(3x - \frac{\pi}{4}) = 0$

(g) $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$

Exercice 4.

Résoudre les équations suivantes : **(a)** $2\sin^4(x) - \sin^3(x) - 2\sin^2(x) + \sin(x) = 0$ sur $[-\pi; \pi[$

(b) $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$ sur $[-\pi; \pi[$ **(c)** $\tan(x) + \frac{3}{\tan(x)} = 4$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$

Exercice 5.

Résoudre les inéquations sur $[0, 2\pi[$:

(a) $2\sin(x) - 1 > 0$ **(b)** $\tan(x) < 1$ **(c)** $2\cos^2(x) + 9\cos(x) + 4 > 0$

Exercice 6.

Simplifier au maximum

1. $\arccos(\cos(\frac{3\pi}{4}))$

2. $\arccos(\cos(\frac{8\pi}{3}))$

3. $\arccos(\cos(\frac{-7\pi}{5}))$

4. $\arcsin(\sin(\frac{-\pi}{6}))$

5. $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{4}))$

6. $\arcsin(\sin(\frac{13\pi}{6}))$

7. $\arctan(\tan(\frac{\pi}{4}))$

8. $\arctan(\tan(\frac{7\pi}{4}))$

9. $\arctan(\tan(\frac{-5\pi}{6}))$

Exercice 7.

Simplifier les expressions suivantes pour $x \in [-1; 1]$:

1. $\cos(2\arccos(x))$ **2.** $\cos(2\arcsin(x))$ **3.** $\sin(2\arccos(x))$ **4.** $\tan(2\arcsin(x))$

Exercice 8.

1. Soient a et b deux réels tels que $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(a+b)$ existent.
Démontrer que $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

2. Soit $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$.

(a) En utilisant la formule obtenue en **1.**, calculer $\tan(\alpha)$.

(b) En déduire les valeurs possibles pour α.

*** (c)** En encadrant α, et avec la question précédente, déterminer sa valeur.

Exercice 9.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x))$$

1. Montrer que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0;\pi]$ et préciser comment en déduire la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0;\frac{\pi}{2}]$, on a $f(x) = 2x$.

3. Déterminer l'expression de $f(x)$ sur $]\frac{\pi}{2};\pi]$.

4. Tracer la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10.

1. Démontrer que pour tout x de $[-1;1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

2. Démontrer que pour tout x de $[-1;1]$, $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$.

3. Démontrer que $\left|\begin{array}{l} \text{pour tout } x > 0,\ \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} \\ \text{pour tout } x < 0,\ \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$.

Exercice 11.

1. Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$ sur $[-\pi,\pi]$.

2. Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto \arctan(\tan(x))$ sur $[0,2\pi[\setminus\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\}$.

Exercice 12.

Étudier la fonction $f : x \mapsto \arctan(x + \frac{1}{x})$.