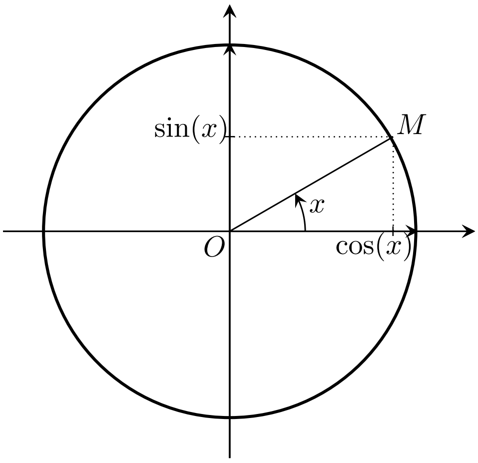
Fonctions circulaires



Définition.

Dans le repère $(0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on associe à tout nombre x le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}) = x$.
• L'abscisse du point M est appelée ***cosinus de*** x, noté $\cos(x)$.
• L'ordonnée de M est appelée ***sinus de*** x, noté $\sin(x)$.
Les fonctions cos et sin sont ainsi définies sur $\mathbb{R}$.

Propriété.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

I. Fonctions Sinus et Arcsinus

1) Sinus

Propriétés.

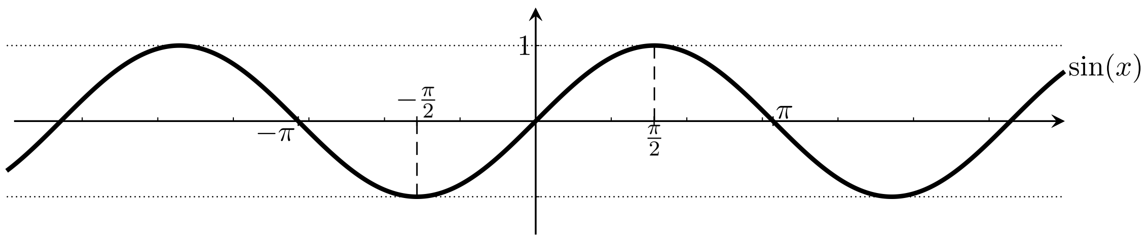
⋆ La ***fonction sinus*** est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$.

⋆ Elle est 2π-périodique : ....

⋆ Elle est impaire : ....

⋆ Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $\sin'(x) =$ ......
(et donc $\sin(u(x))$ a pour dérivée ....)

⋆ Limite remarquable : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \ldots$.



2) Arcsinus

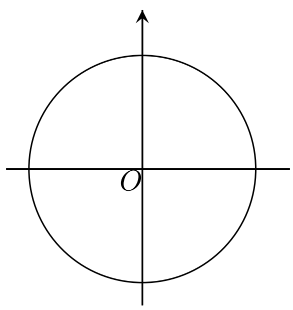
x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	-1 ↗	1

La fonction sinus n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$.
Mais elle est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et sur cet intervalle elle atteint les valeurs -1 et 1. Donc sa restriction à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ réalise une bijection dans $[-1, 1]$.

Définition.

On appelle ***arcsinus*** la bijection réciproque de la fonction $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$ (restriction de la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$).

Autrement dit, $\arcsin : \begin{array}{rcl} [-1;1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \mapsto & y \text{ tel que } \sin(y) = x \end{array}$



Exemples : $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ldots$ car ....

$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \ldots$ $\arcsin(-1) = \ldots$

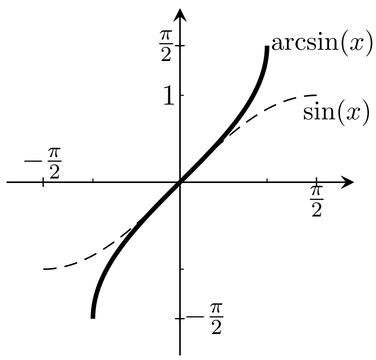
Calculs avec $\arcsin$ **:**

- $\forall x \in \ldots\ldots\ldots\ldots,\quad \boxed{\arcsin(\sin(x)) = \ldots}$ (1)
- $\forall x \in \ldots\ldots\ldots\ldots,\quad \boxed{\sin(\arcsin(x)) = \ldots\ldots}$ (2) et $\boxed{\cos(\arcsin(x)) = \ldots\ldots}$ (3)

En effet,

Propriétés de la fonction Arcsinus.

- ⋆ La fonction Arcsinus est définie sur $[-1;1]$ et prend ses valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
- ⋆ Elle est dérivable sur $]-1;1[$ et $\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.
- ⋆ Elle est strictement croissante sur $[-1;1]$, et impaire.



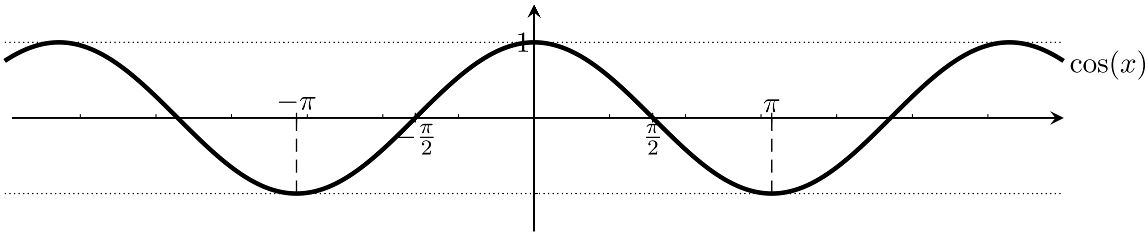
Justifications :

II. Fonctions Cosinus et Arccosinus

1) Cosinus

Propriétés.

- ⋆ La ***fonction cosinus*** est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$.
- ⋆ Elle est 2π-périodique : ....
- ⋆ Elle est paire : ....
- ⋆ Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $\cos'(x) =$ ......
  (et donc $\cos(u(x))$ a pour dérivée ....)
- ⋆ Limite remarquable : $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} =$ ....

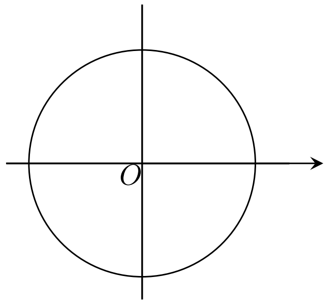


2) Arccosinus

x	0 $\qquad$ π
$\cos(x)$	$1 \searrow -1$

La fonction cosinus n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$.
Mais elle est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, et sur cet intervalle elle atteint les valeurs -1 et 1. Donc sa restriction à $[0, \pi]$ réalise une bijection dans $[-1, 1]$.

Définition.



On appelle ***arccosinus*** la bijection réciproque de la fonction $\cos|_{[0,\pi]}$ (restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$).

Autrement dit, $\arccos : [-1; 1] \to [0, \pi]$
$x \mapsto y$ tel que $\cos(y) = x$

Exemples : $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$ ...... car ....

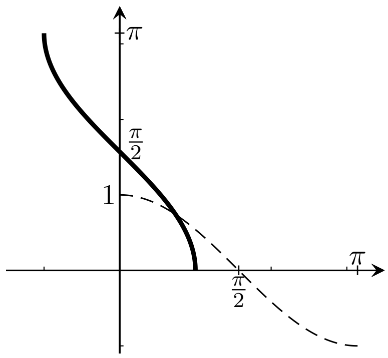
$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \dots$ $\qquad$ $\arccos(-1) = \dots$

Calculs avec arccos **:**

- $\forall x \in$ ...., $\boxed{\arccos(\cos(x)) = \dots}$ (1)
- $\forall x \in$ ...., $\boxed{\cos(\arccos(x)) = \dots\dots}$ (2) et $\boxed{\sin(\arccos(x)) = \dots\dots}$ (3)

En effet,

Propriétés de la fonction Arccosinus.



- $\star$ La fonction Arccosinus est définie sur $[-1;1]$ et prend ses valeurs dans $[0,\pi]$.
- $\star$ Elle est dérivable sur $]-1;1[$ et $\boxed{\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.
- $\star$ Elle est strictement décroissante sur $[-1;1]$.

Justifications :

III. Fonctions Tangente et Arctangente

1) Tangente

Définition.

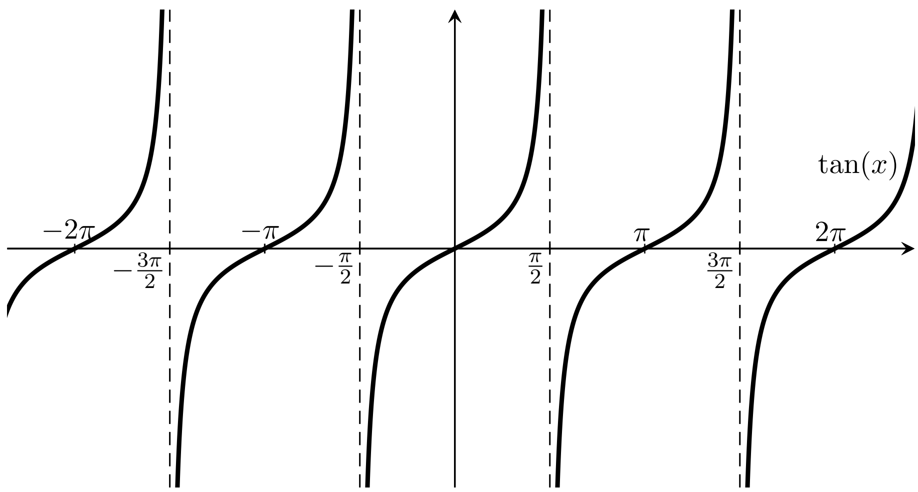
La ***fonction tangente*** est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Propriétés.

La ***fonction tangente*** est :

- $\star$ π-périodique : ....
- $\star$ impaire : ....
- $\star$ dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ et pour tout x de cet ensemble, $\boxed{\tan'(x) = \ \dots\dots\dots\dots\dots}$

  (si u est dérivable et à valeurs dans $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, on a $\tan(u)' =$..........................)
- $\star$ Limites remarquables : $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x) = +\infty$.



Démonstrations :

2) Arctangente

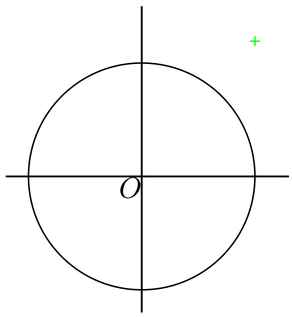
x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

La fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.
Donc sa restriction à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ réalise une bijection dans $\mathbb{R}$.

Définition.

On appelle ***arctangente*** la bijection réciproque de la fonction $\tan|_{\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[}$ (restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$).

Autrement dit, $\arctan : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \mapsto & y \text{ tel que } \tan(y) = x \end{array}$



Exemples : $\arctan(1) = \ldots\ldots$ car $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\arctan(-\sqrt{3}) = \ldots$; $\arctan(0) = \ldots.$

Calculs avec $\arctan$ **:**

- $\forall x \in \ \ldots\ldots\ldots\ldots, \arctan(\tan(x)) = \ldots$
- $\forall x \in \ \ldots\ldots, \tan(\arctan(x)) = \ldots$
- $\forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(x)) =$

Propriétés de la fonction Arctangente.

⋆ La fonction Arctangente est définie sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

⋆ Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\arctan'(x) = \ldots\ldots}$.

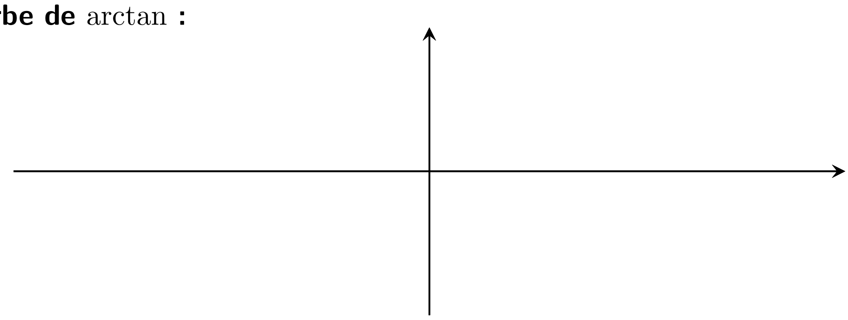
(et pour toute fonction u dérivable, $(\arctan(u))' = \ldots\ldots$)

⋆ Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et impaire.

⋆ Limites remarquables : $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \ldots\ldots$

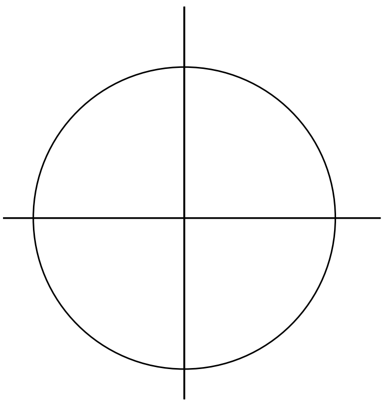
Preuves :

Courbe de $\arctan$ **:**



IV. Équations trigonométriques

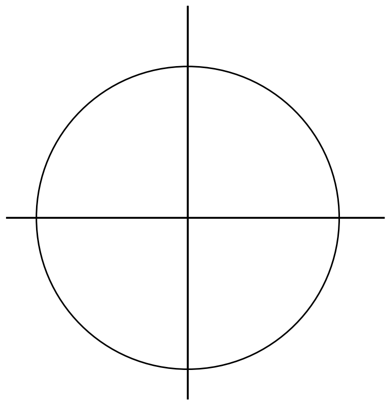
1) Équation $\sin(\theta) = a$



En fait, $\boxed{\sin(\theta) = a \iff \theta = \arcsin(a)\ (2\pi) \text{ ou } \theta = \pi - \arcsin(a)\ (2\pi)}$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(x) = \frac{1}{4}$.

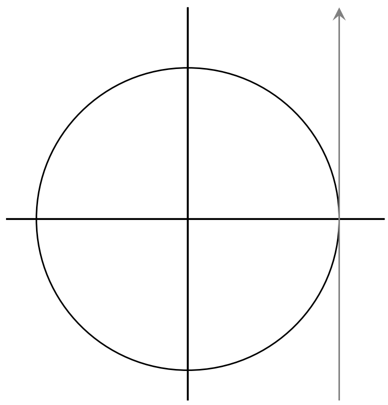
2) Équation $\cos(\theta) = a$



En fait, $\boxed{\cos(x) = a \iff \theta = \arccos(a)\ (2\pi) \text{ ou } \theta = -\arccos(a)\ (2\pi)}$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Équation $\tan(\theta) = a$



En fait, $\boxed{\tan(\theta) = a \iff \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$.

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan(x) = \frac{1}{4}$.

Bilan : pour résoudre des équations trigonométriques, utiliser les formules de trigonométrie pour simplifier l'expression puis utiliser les équivalences ci-dessus.

Attention : dans les calculs, utiliser la notation $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \ldots + 2k\pi$ plutôt que $\theta = \ldots (2\pi)$ pour en tenir compte correctement à chaque opération.

Exemple : résolution de l'équation $(E) : \sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{6})$.