Étude de fonctions

Exercice 1.

1. Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

2. Déterminer un nouveau repère, défini à partir de O, $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$, dans lequel la courbe $\mathcal{C}$ représentera la fonction $x \mapsto x^2 - 2$.

3. Déterminer un autre repère dans lequel la courbe $\mathcal{C}$ représentera la fonction $x \mapsto \frac{1}{4}x^2$.

4. Par quelle transformation géométrique à partir de $\mathcal{C}$ peut-on obtenir la courbe de la fonction $x \mapsto (x-3)^2$?

Exercice 2.

1. Tracer l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $t \mapsto e^{-t}$ sur $\mathbb{R}^+$ dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2. La tension aux bornes d'un condensateur est, sous certaines conditions, donnée par la fonction $u(t) = Ue^{-\frac{t}{RC}}$ où U, R et C sont des constantes strictement positives.
Déterminer à partir de $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ le repère dans lequel la courbe $\mathcal{C}$ représente cette tension.

Exercice 3.

On pose $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = f(x-1)$ est paire.

3. En déduire que $f(-1+x) = f(-1-x)$ et que la courbe de f a un axe de symétrie que l'on précisera.

Exercice 4.

Les fonctions suivantes sont-elles paires ? impaires ? $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$? $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$?

Exercice 5.

Soit $f(x) = \sqrt{1 - \cos(x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, et son ensemble de dérivabilité.

2. Déterminer un intervalle d'étude le plus petit possible, et préciser comment reconstruire la courbe entière à partir de cet intervalle.

Exercice 6.

Soit $f(x) = \ln(1 + \cos(x))$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Étudier la parité et la périodicité de f. En déduire un intervalle d'étude le plus petit possible.

3. Déterminer la limite de f en π.

4. Étudier les variations de f et préciser ses extrema éventuels.

5. Justifier que f réalise une bijection de $[0,\pi[$ sur un intervalle à préciser.

6. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en 0, et en $\frac{\pi}{2}$.

7. Tracer l'allure du graphique de f. (*on précise que* $\ln(2) \approx 0,7$)

Exercice 7.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 1 + \sqrt{x}$.

1. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle à préciser.
Déterminer sa réciproque.

2. Combien de solutions admet l'équation $f(x) = 3$? et l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$?

* Exercice 8.

Montrer que si f est impaire et bijective, sa bijection réciproque est impaire.