Étude de fonctions

I. Graphiques, propriétés

Dans cette partie, le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Repères, courbe

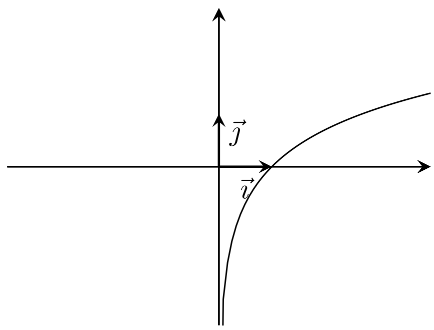
Définition.
La ***courbe représentative*** (ou ***graphe***) de f est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x \in \mathcal{D}_f$, que l'on représente dans le plan.
On la note en général $\mathcal{C}_f$.

Transformations de courbes.

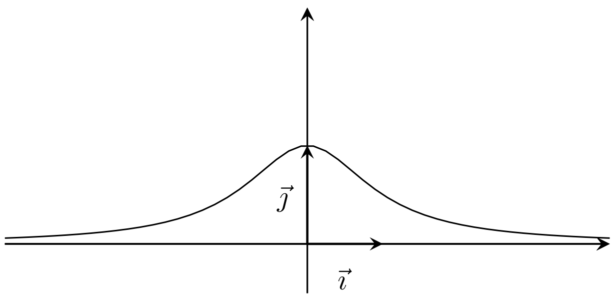
Propriété.
- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x)+a$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $a\vec{j}$.
- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x+a)$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.
- Pour représenter graphiquement la fonction $x \mapsto af(x)$, il faut multiplier les ordonnées des points de $\mathcal{C}_f$ par a.
- Pour représenter graphiquement la fonction $x \mapsto f(ax)$, il faut diviser les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ par a.

Exemples :

1. Voilà ci-contre le graphique de la fonction ln.
Tracer dans le même repère les allures des fonctions $x \mapsto \ln(x+3)$ (en vert) et $x \mapsto \ln(x)+2$ (en rouge).



2.



Ci-contre est représentée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.
Tracer sur le même repère les allures des fonctions $x \mapsto \frac{1}{(3x)^2+1}$ (en vert) et $x \mapsto \frac{2}{x^2+1}$ (en rouge).

3. La courbe de $x \mapsto e^{-x}$ est ....

La courbe de $x \mapsto -e^{x}$ est ....

2) Parité, imparité, périodicité

Définition.
Soit f une fonction. On suppose que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 (autrement dit : pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$).
- f est ***paire*** signifie : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = f(x)$. $\ll \dots$
- f est ***impaire*** signifie : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = -\Big(f(x)\Big)$.

Interprétation graphique et conséquence sur l'étude de fonction :

La courbe d'une fonction paire est ....

La courbe d'une fonction impaire est ....

Donc lorsqu'une fonction est paire ou impaire, on étudie $f|_{\mathbb{R}^+\cap\mathcal{D}_f}$ et on déduit l'autre partie par symétrie.

Définition.

Une fonction f est dite ***périodique*** si : ...
« il existe un réel T strictement positif tel que pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $x+T \in \mathcal{D}_f$ et $f(x+T) = f(x)$ »
T est une ***période*** de f. On dit que f est ***périodique de période*** T, ou encore T***-périodique***.

Exemples : les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π (ou 2π-périodiques).

Interprétation graphique et conséquence sur l'étude de fonction :
La courbe d'une fonction T-périodique est invariante par translation de vecteur $T\vec{\imath}$.
Ainsi, il suffit d'étudier f sur une période et de déduire le reste de la courbe par translation.

Exemples : préciser la parité, imparité et périodicité des fonctions trigonométriques, et en déduire le plus petit domaine d'étude possible pour chacune puis les transformations nécessaires pour reconstituer toute la courbe.

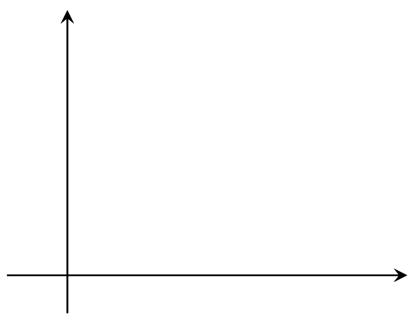
II. Variations et utilisation

1) Variations, majoration et minoration

Caractérisations de la croissance d'une fonction.

Une fonction f est dite ***croissante sur un ensemble*** $\mathcal{D}$ si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :

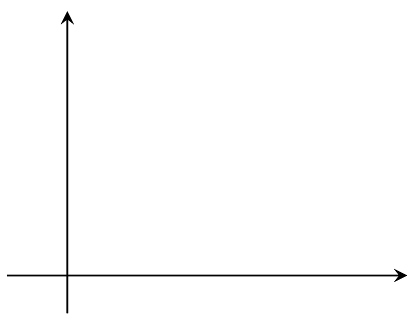
- ⋆ sa courbe représentative monte dans la partie correspondant à $\mathcal{D}$.
- ⋆ si x augmente (en restant dans $\mathcal{D}$), alors $f(x)$ augmente.
- ⋆ pour a et b dans $\mathcal{D}$: $a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$.
- ⋆ les nombres et leurs images sont rangés dans le même ordre « f conserve l'ordre ».
- ⋆ lorsque $\mathcal{D}$ est un intervalle et que f est dérivable sur $\mathcal{D}$:
$$\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) \geqslant 0.$$



Caractérisations de la décroissance d'une fonction.

Et une fonction f est ***décroissante sur*** $\mathcal{D}$ si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :

- ⋆ ....
- ⋆ ....
- ⋆ ....
- ⋆ ....
  ....
- ⋆ ....



Vocabulaire : une fonction f est dite ***monotone*** si elle est croissante sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, ou si elle est décroissante sur $\mathcal{D}_f$.

Remarque importante : si pour a et b dans $\mathcal{D}$ tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$, alors f est dite ***strictement croissante sur*** $\mathcal{D}$. C'est le cas aussi avec lorsque si $f'(x) > 0$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points).
Même chose avec ***strictement décroissante***, et cela s'applique de la même façon à la monotonie : strictement monotone si strictement croissante, ou si strictement décroissante.

Définitions.

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$.

- On dit que f est ***majorée*** lorsque : ....
  (autrement dit : les valeurs prises par la fonction f sont toutes plus petites que M)
  M est appelé ***majorant*** de f sur $\mathcal{D}_f$.
- On dit que f est ***minorée*** lorsque : ....
  m est un nombre, appelé un ***minorant*** de f sur $\mathcal{D}_f$.
- On dit que f est ***bornée*** si elle est majorée et minorée sur $\mathcal{D}_f$.
  Autrement dit ....

Remarques : f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.
Avec $I \subset \mathcal{D}_f$, on dit que f est majorée par M sur I si pour tout x de I, $f(x) \leqslant M$.

Définitions.

f est une fonction et $a \in \mathcal{D}_f$.

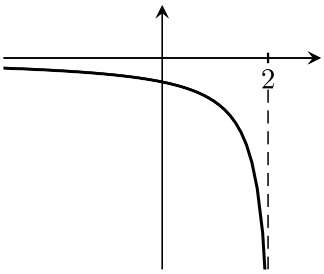
- On dit que f admet un ***maximum global*** (respectivement ***minimum global***) en a si :

  ....
- On dit que f admet un ***maximum local*** (respectivement ***minimum local***) en a si :
  $\exists \delta > 0, \forall x \in \,]a-\delta; a+\delta[\, \cap \mathcal{D}_f,\ f(x) \leqslant f(a)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(a)$).

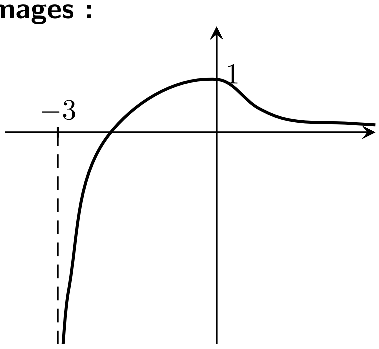
Illustrations et exemples :

2) Bijection et réciproque

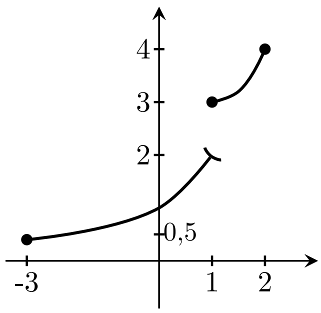
Exemples d'ensembles images :



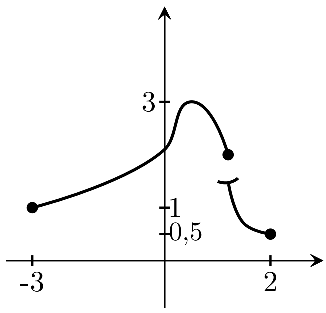
$I =]-\infty; 2[$
$f(I) =$



$I_1 =]-3 + \infty[$
$g(I_1) =$
$I_2 =]-3, 0]$
$g(I_2) =$



$I = [-3; 2]$
$h(I) =$



$I = [-3; 2]$
$k(I) =$

a. bijection

Définition(rappel).

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \to J$.

f est une ***bijection*** de I dans J si ....

Autrement dit : ....

Méthode pour montrer qu'une fonction est une bijection, on se base pour l'instant sur le tableau de variations (justifié !) complet avec limites aux bornes et/ou extrema :
si la fonction est *strictement* monotone sur un intervalle I, elle réalise une bijection de cet intervalle dans $f(I)$, $f(I)$ étant déterminé par lecture du tableau des variations.

Exemple : la fonction f est définie sur $]-\infty;4]$ et on donne le tableau de ses variations.

x	$-\infty$		2		4
$f(x)$	7	$\searrow$	-10	$\nearrow$	-3

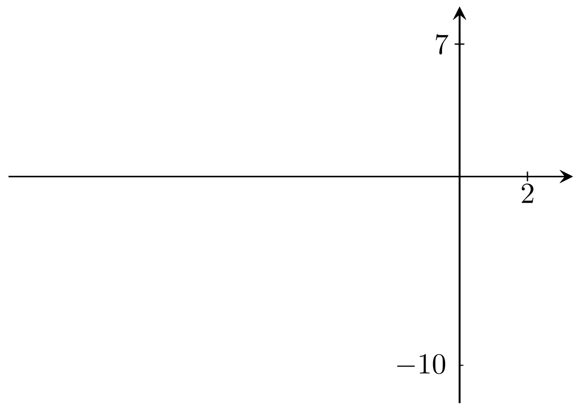
D'après ce tableau, on peut affirmer que f est une bijection de .... dans ....
Ou encore, ...

b. réciproque

La fonction f précédente réalise une bijection de $]-\infty;2]$ sur $[-10;7[$.
Ainsi, tout nombre y entre -10 et 7 a un unique antécédent par f dans $]-\infty;2]$, c'est-à-dire un nombre x de $]-\infty;2]$ tel que $f(x)=y$.
Ce procédé définit la fonction réciproque de f, notée f^{-1}.

$$f^{-1}: \begin{array}{rcl} [-10;7[& \to &]-\infty;2] \\ y & \mapsto & x \text{ tel que } f(x)=y \end{array}.$$

Ainsi par exemple $f^{-1}(\ldots)=\ldots$ car $f(2)=-10$.



Rappel : Si f est une bijection de I dans J, on appelle réciproque de f la fonction notée f^{-1}, qui à tout nombre y de J associe son unique antécédent x par f, c'est-à-dire : $\boxed{f^{-1}: \begin{array}{rcl} J & \to & I \\ y & \mapsto & x \text{ tel que } f(x)=y \end{array}}$

En particulier : $\boxed{f(x)=y \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)}$.

Propriété.

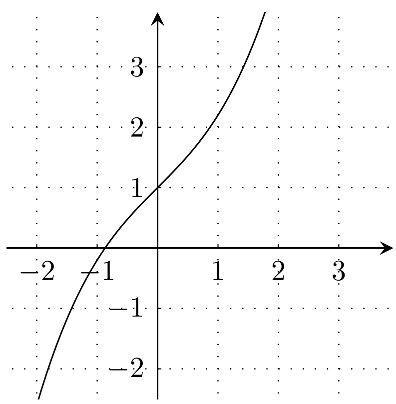
Soit f une fonction continue et dérivable, qui réalise une bijection de I dans J. Alors :

- son application réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur J, de même sens de variation que f ;
- f^{-1} est dérivable (sauf aux points $f(a)$ si $f'(a)=0$) et $\left(f^{-1}\right)'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$
- la représentation de f^{-1} se déduit de celle de f par symétrie par rapport à la droite $y=x$.

Exemple : f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{5}x^3+x+1$.

Justifier que f est une bijection, préciser l'ensemble de définition de sa réciproque, ainsi que ses variations.

La courbe représentative de f est tracée ci-dessous. Sur le même graphique, représenter f^{-1}.



Remarque : comme c'est le cas dans l'exemple précédent, il se peut que l'on ne puisse pas trouver d'expression simple pour f^{-1}, bien que l'on connaisse certaines de ses caractéristiques (ensemble de définition, variations, courbe ...)