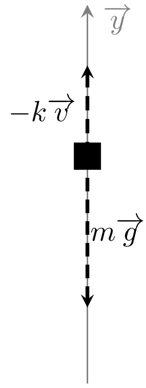
Équations différentielles.

Une équation différentielle a pour inconnue une fonction. C'est une égalité qui lie la fonction et sa ou ses dérivées sur un intervalle donné.

Par exemple, lors d'une chute libre d'un corps dans l'air, les forces s'exerçant sur le corps sont :
⋆ le poids : masse × $\overrightarrow{g}$
⋆ le frottement, proportionnel à la vitesse : $-k\overrightarrow{v}$ $(k > 0)$
Le principe fondamental de la dynamique assure que ....
De plus, l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, donc si $v(t)$ est la vitesse à l'instant t projetée sur l'axe vertical $\overrightarrow{y}$, on obtient : $mv'(t) = -mg - kv(t)$.
Ainsi, trouver l'expression de la vitesse en fonction du temps revient à résoudre l'équation différentielle $mv' + kv = -mg$ sur $]0, +\infty[$.



Les équations différentielles se sont posées dès le début de l'analyse, trouvant leur origine dans des problèmes de géométrie ou de mécanique. Les fonctions déjà connues ont vite montré leurs limites pour la résolution de ces équations. Newton, Leibniz, Huygens, Bernoulli, puis Euler, Clairaut, Lagrange ... ont contribué à élaborer des méthodes de résolution d'équations différentielles de plus en plus complexes, notamment en formalisant la fonction exponentielle. Toutefois, on ne sait résoudre de manière exacte que très peu d'équations différentielles. En pratique, pour beaucoup d'équations différentielles, on utilise des méthodes numériques pour déterminer des solutions approchées satisfaisant le problème physique.

I. Généralités sur les équations différentielles

Une équation différentielle est dite d'ordre 1 si elle lie la fonction et sa dérivée, et d'ordre 2 si elle lie la fonction, sa dérivée, et sa dérivée seconde.

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 a pour forme :
$(\mathcal{E}) : \cdots y'' + \cdots y' + \cdots y = \varphi(x)$.
On appelle ***équation homogène associée*** que l'on note $(\mathcal{H})$ l'équation sans second membre c'est-à-dire :
$(\mathcal{H}) : \cdots y'' + \cdots y' + \cdots y = 0$.

La notation y pour la fonction inconnue vient de la physique (déplacement sur l'axe des ordonnées), et la variable sera x dans ce cours, mais elle est aussi souvent notée t pour le temps : $y' + a(t)y = b(t)$.

Théorème.
Si y_p est UNE solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$, alors on obtient TOUTES les solutions de $(\mathcal{E})$ en ajoutant y_p aux solutions $y_{\mathcal{H}}$ de l'équation homogène.

Solutions générales de $(\mathcal{E})$	$=$	Solution particulière	$+$	Solutions générales de $(\mathcal{H})$
$y(x)$	$=$	$y_p(x)$	$+$	$y_{\mathcal{H}}(x)$

Définition.
On appelle ***problème de Cauchy*** lié à une équation différentielle, la donnée d'une équation différentielle et de condition(s) initiale(s).
Pour une équation d'ordre 1, on donne une condition initiale : $y(x_0) = y_0$.
Pour une équation d'ordre 2, on en donne deux : $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$.

II. Résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre $y' + a(x)y = b(x)$

Définition.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On appelle ***équation différentielle linéaire du premier ordre*** toute équation de la forme :

$$(\mathcal{E}) \ : \ y' + a(x)y = b(x)$$

où :
- ⋆ l'inconnue y est une fonction dérivable sur I ;
- ⋆ a et b sont des fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues sur un intervalle I.

f est une solution de $(\mathcal{E})$ signifie que $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \text{ et} \\ \forall x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x). \end{cases}$

Exemple : vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = -\frac{1}{2x}$ est solution de l'équation :

$$(\mathcal{E}) \ : \ y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

Remarque : on peut trouver des équations du type $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, mais sur tout intervalle où a ne s'annule pas, l'équation est équivalente à $y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)}$ et on se ramène donc à l'équation de référence.

1) Solutions de l'équation homogène

L'équation homogène est ici $\boxed{(\mathcal{H}) : y' + a(x)y = 0}$.

Théorème.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ sur l'intervalle I sont les fonctions de la forme $y(x) = \lambda e^{-A(x)}$ où A est une primitive de a sur I et λ une constante réelle ou complexe.

Démonstration :

Exemple : Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation $2xy'+y=0$:

2) Solutions particulières

Une solution particulière d'une équation différentielle est une des solutions de l'équation. Il existe plusieurs techniques pour en déterminer une.

a) Variation de la constante : si $y_{\mathcal{H}}(x)=\lambda e^{-A(x)}$ est la forme des solutions de l'équation homogène, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x)=\lambda(x)e^{-A(x)}$.

Alors $y_p'(x)=\dots$

Donc $y_p'(x)+a(x)y_p(x)=\dots$

Ainsi, il « suffit » de trouver $\lambda(x)$ telle que $\lambda'(x)e^{-A(x)}=b(x)$, soit $\lambda'(x)=b(x)e^{A(x)}$.

Exemple : résolution de $y'+2y=\frac{1}{1+e^{2x}}$.

Attention : cette méthode n'est pas miraculeuse, elle se ramène à une recherche de primitive, qui peut être complexe.

b) Techniques plus rapides dans des cas particuliers.

Si la forme du second membre est ...	**on peut rechercher une solution particulière sous la forme ...**
polynôme (en particulier constante)	polynôme de même degré
$P(x)e^{\alpha x}$ avec P polynôme de degré n :	
si $e^{\alpha x}$ est solution de $\mathcal{H}$	$Q(x)e^{\alpha x}$ avec Q polynôme de degré $n+1$
si $e^{\alpha x}$ n'est pas solution de $\mathcal{H}$	$Q(x)e^{\alpha x}$ avec Q polynôme de degré n
$A\cos(\omega x)$ ou $A\sin(\omega x)$	$a\cos(\omega x)+b\sin(\omega x)$
cas général	$\lambda(x)e^{-A(x)}$: méthode de variation de la constante.

Attention : les formes présentées ci-dessus ne fonctionnent pas toujours. Il s'agit juste de pistes pour chercher une solution particulière lorsque l'on n'a pas d'indication de l'énoncé ni d'idée a priori.

Exemple : résolution de $y' + 2y = (3x+1)e^{-x}$.

c) Principe de superposition : Si y_1 et y_2 sont des solutions particulières des équations respectives $y' + a(x)y = b_1(x)$ et $y' + a(x)y = b_2(x)$, alors $y_1 + y_2$ est une solution de $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.
Autrement dit, lorsque le second membre est une somme, on cherche une solution particulière pour chacun des termes, et on ajoute ces solutions.

Exemple : résolution de $y' + 2y = \frac{1}{1+e^{2x}} + (3x+1)e^{-x}$.

3) Problème de Cauchy

Le ***problème de Cauchy*** au premier ordre peut s'écrire $\left\{\begin{array}{l} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$.

Théorème.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 dans I et y_0 dans $\mathbb{C}$, alors toute équation différentielle sur I de la forme $y' + a(x)y = b(x)$ aura une solution unique vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Exemple : résoudre le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} y' - 2y = x^2 + 2x - 1 \\ y(0) = 3 \end{array}\right.$.

III. Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On appelle ***équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants*** toute équation de la forme

$$(\mathcal{E}) \ : \ y'' + ay' + by = \varphi(x)$$

où :
- ⋆ l'inconnue y est une fonction deux fois dérivable sur I ;
- ⋆ a et b sont des nombres réels ;
- ⋆ φ est une fonction à valeurs réelles ou complexes, continue sur un intervalle I.

f est une solution de cette équation signifie que $\begin{cases} f \text{ est deux fois dérivable sur } I \text{ et} \\ \forall x \in I,\ f''(x) + af'(x) + bf(x) = \varphi(x). \end{cases}$

Remarque : on peut trouver des équations du type $ay'' + by' + cy = \varphi(x)$, mais si $a \neq 0$, l'équation est équivalente à $y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = \frac{\varphi(x)}{a}$ et on se ramène donc à l'équation de référence.

1) Solutions de l'équation homogène

L'équation homogène est ici $\boxed{(\mathcal{H}) : y'' + ay' + by = 0}$.

On recherche des solutions sous forme $f(x) = e^{rx}$.

Alors $f'(x) =$ .... et $f''(x) =$ ....

Donc $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0 \Longleftrightarrow$ ....

Ainsi, la fonction $x \mapsto e^{rx}$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si r est solution de l'équation $r^2 + ar + b = 0$.

Définition.

On appelle ***équation caractéristique*** de $(\mathcal{E})$ l'équation $r^2 + ar + b = 0$.

Rappel : pour un polynôme du second degré à coefficients réels, si $\Delta < 0$ les racines sont complexes conjuguée. Déterminons par exemple les racines de $x^2 - 4x + 5$:

Théorème : solutions complexes de l'équation homogène.

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de $(\mathcal{E})$.

- Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation caractéristique a deux solutions distinctes, r_1 et r_2 et les solutions de $(\mathcal{H})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \qquad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique a une unique solution r_0 et les solutions de $(\mathcal{H})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = \lambda e^{r_0 x} + \mu . x . e^{r_0 x} \qquad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

Exemple : déterminons les solutions à valeurs complexes de $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Théorème : solutions réelles de l'équation homogène.

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de $(\mathcal{E})$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique a deux solutions distinctes réelles r_1 et r_2, et les solutions de $(\mathcal{H})$ à valeurs réelles sont les fonctions de la forme

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \qquad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique a une solution r_0 et les solutions de $(\mathcal{H})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = \lambda e^{r_0 x} + \mu . x . e^{r_0 x} \qquad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions réelles de $(\mathcal{H})$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = e^{\alpha x}\Big(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\Big) \qquad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple : déterminons les solutions à valeurs réelles de $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Cas particuliers : équations de type $y'' + \omega^2 y = 0$ ou $y'' - \omega^2 y = 0$, avec $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

2) Solutions particulières

Si la forme du second membre est ...	**on recherche une solution particulière sous la forme ...**
une constante	d'une constante
$Ae^{\omega x}$:	
si ω n'est pas racine de l'éq. caractéristique	$\alpha e^{\omega x}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$)
si ω est racine simple de l'éq. caractéristique	$\alpha x e^{\omega x}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$)
si ω est racine double de l'éq. caractéristique	$\alpha x^2 e^{\omega x}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$)

Le **principe de superposition** est toujours valable.

Exemple : résoudre l'équation $y'' - 5y' + 6y = 7 + e^{-x} + e^{2x}$.

3) Problème de Cauchy

Le ***problème de Cauchy*** au second ordre peut s'écrire $\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$.

Théorème.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 dans I et y_0 et y'_0 dans $\mathbb{C}$, alors toute équation différentielle sur I de la forme $y'' + ay' + by = \varphi(x)$ aura une solution unique vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0$.

Exemple : résoudre le problème de Cauchy $y'' - 5y' + 6y = 7 + e^{-x} + e^{2x}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Bilan