Espaces probabilisés finis

≪ *Au-delà du raisonnement mathématique, tout dans le monde n'est que probabilités.* ≫
Irénée Jules Bienaymé (1796-1878)

Historiquement, la théorie des probabilités s'est développée en lien avec les jeux de hasard, en particulier les jeux de dés, et la répartition des gains. L'étude de ce domaine s'est faite tardivement dans l'histoire des mathématiques, elle commença vraiment au XVII$^{\text{è}}$ siècle avec Pascal. C'est ensuite Kolmogorov, au XX$^{\text{è}}$ siècle seulement qui formalisa mathématiquement en se basant sur la théorie des ensembles et permit des réponses rigoureuses aux intuitions. Cette théorie est aujourd'hui utilisée en physique, biologie, économie, finance et notamment dans l'estimation des risques pour les assurances ...

I. Modélisation d'une situation aléatoire

1) Expérience aléatoire, introduction

Les probabilités s'étudient sur une ***expérience aléatoire***, c'est-à-dire une expérience dont on ne peut pas prédire avec certitude le résultat avant de l'avoir effectuée.
Par exemple lancer un dé, mesurer la durée de vie d'un appareil, d'une molécule radioactive, tirer à pile ou face, évaluer le temps d'attente d'un autobus ...

Définition.

On appelle ***issue*** l'un des résultats possibles de l'expérience.
L'***ensemble*** des issues de l'expérience est appelé ***univers*** (ou univers des possibles), on le note Ω.

Exemples :

Expérience aléatoire 1 : lancer une pièce. Le résultat peut être ....

Donc $\Omega =$...

Expérience aléatoire 2 : lancer un dé. $\Omega =$...

2 est une issue possible de l'expérience : $\underline{2 \in \Omega}$, mais 9 n'est pas une issue de cette expérience : $\underline{9 \notin \Omega}$ (autrement dit, 9 n'est pas un élément de l'ensemble Ω).

Expérience aléatoire 3 : lancer deux dés discernables numérotés chacun de 1 à 6.

on peut obtenir ....

donc chaque issue est ....

donc $\Omega =$...

Expérience aléatoire 4 : dans une urne se trouvent 6 boules noires numérotées de 1 à 6 et 4 boules blanches numérotées de 7 à 10 : on tire une boule dans cette urne.

....

....

Expérience aléatoire 5 : on lance un dé plusieurs fois, et on s'intéresse au numéro du tirage auquel on obtient un 6 pour la première fois.
L'univers est ....

Card(Ω) est le nombre d'éléments de l'ensemble Ω, c'est donc le nombre d'issues possibles à l'expérience.
Pour le cours de première année, il n'y aura qu'un nombre fini d'issues possibles à chaque expérience, c'est-à-dire que Card(Ω) sera un nombre fini. (Cela exclut donc l'expérience 5.)

On rappelle que $\boxed{\text{Card}(E \times F) = \text{ ....}}$.

2) Événements

Définition.

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.
Un ***événement*** est une partie de l'univers, donc un ensemble d'issues.
L'ensemble des événements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$, ensemble des parties de Ω.
L'événement A est réalisé si l'issue ω de l'expérience est un élément de A. On dit aussi que ω est une issue ***favorable*** à A.

Exemple : dans l'expérience 2, l'issue .... est favorable à l'événement « obtenir un nombre pair », l'issue .... n'y est pas favorable.

Définition.

Quelques événements particuliers :
- ⋆ un événement ***élémentaire*** : de la forme $\{\omega\}$, il contient exactement une issue ;
- ⋆ l'***événement impossible*** : un événement qui n'est jamais réalisé, aucune issue ne lui est favorable, il correspond à l'***ensemble vide***, noté $\emptyset$;
- ⋆ l'***événement certain*** : toutes les issues possibles lui sont favorables, il est représenté par Ω.

Exemple : dans l'expérience aléatoire 3, l'affirmation « on obtient un total de points au moins égal à 10 », est un événement, qui contient les issues ....
Si on appelle A cet événement, on a alors $A = \{$ ....
que l'on peut aussi noter $A = \{(x, y)$ .... $\}$ (« ensemble des couples (x, y) de Ω tels que $x + y \geqslant 10$ »).

Les événements étant assimilés à des ensembles, on peut les réunir, prendre leur intersection.

Définition.

A et B sont deux événements d'un même univers Ω.
- L'événement A ***ou*** B (noté $A \cup B$) est l'événement formé de toutes les issues favorables à A ou à B (ou aux deux).
- L'événement A ***et*** B (noté $A \cap B$) est l'événement formé des issues favorables à la fois à A et à B.
- A et B sont dits ***incompatibles*** s'ils n'ont pas d'issue en commun : l'événement $A \cap B$ est l'événement impossible (les ensembles des issues de A et des issues de B sont disjoints).
- L'événement $\overline{A}$, appelé ***événement contraire de*** A est l'événement constitué de toutes les issues qui ne sont pas favorables à A.

On a toujours $\boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$.

Exemples :

1. dans l'expérience aléatoire 3 on définit les événements suivants :
- A : « La somme obtenue est supérieure ou égale à 10 »,
- B : « Le nombre obtenu avec le premier dé est 6 »,
- C : « On obtient deux nombres impairs »,

alors – les événements B et C ...., A et B ....
....
– $A \cup B =$..
– $\bar{A}$: « ....
$\bar{C}$: « ....
– $A \cap C =$..

2. On achète trois billets de tombola.
– contraire de « tous les billets sont gagnants » : ....
– contraire de « aucun des billets n'est gagnant » : ....

II. Probabilités

On rappelle que pour toute la fin du cours, l'univers Ω est un ensemble fini.

Pour compléter l'étude d'une expérience aléatoire, il nous reste à associer à tout événement A dans l'univers Ω ses chances d'être réalisé : c'est la ***probabilité*** de A, que l'on notera $\mathbf{P}(A)$.

1) Qu'est-ce qu'une probabilité ?

Définition.

On appelle ***probabilité*** sur Ω une application $P : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0;1] \\ A & \mapsto & \mathbf{P}(A) \end{array}$ « P associe à tout événement A de $\mathcal{P}(\Omega)$, un nombre $\mathbf{P}(A)$ dans $[0;1]$ »

qui vérifie les propriétés :

(i) $\boxed{\mathbf{P}(\Omega) = 1}$ (la probabilité de l'événement certain est 1) ;

(ii) $\boxed{\text{si } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)}$ (si A et B sont incompatibles, alors la probabilité de leur réunion est la somme des probabilités de chacun).

Le couple $(\Omega, \mathbf{P})$ est appelé un ***espace probabilisé***.

Propriété.

- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires (ou issues) qui le constituent : $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$.
- Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ et $(p_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ sont des réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω telle que $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

Remarque : le 2ème point exprime que pour définir une probabilité, il suffit de connaître le tableau :

issues	ω_1	ω_2	$\ldots$	ω_n	total
probabilités associées	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	1

alors entre autres : $\mathbf{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) = \mathbf{P}(\{\omega_1\}) + \mathbf{P}(\{\omega_2\})$.

Choisir les probabilités de chaque issue revient à choisir un ***modèle probabiliste*** pour notre expérience aléatoire. Le choix d'un modèle probabiliste dépend des modalités de l'expérience aléatoire.
Par exemple, sur un lancer de pièce à Pile ou Face, on a toujours $\Omega = \{\text{Pile ; Face}\}$, mais on peut avoir plusieurs modèles selon la pièce : si elle est équilibrée, $\mathbf{P}(\text{Pile}) = \mathbf{P}(\text{Face}) = \dfrac{1}{2}$, mais on pourrait avoir $\mathbf{P}(\text{Pile}) = 0,4$ et $\mathbf{P}(\text{Face}) = 0,6$ si elle est truquée.

Exercice : Une pièce est truquée de telle sorte qu'il y a deux fois plus de chances d'obtenir Pile que Face. Déterminer Ω et les probabilités de chacune des issues dans cette situation.

2) Exemple fondamental : cas d'équiprobabilité

Dans certaines situations, il se peut que les conditions de l'expérience permettent d'affirmer que toutes les issues ont la même probabilité : dé *équilibré*, boules *indiscernables*, choix au *hasard* ...

Propriété (et définition).

Dans le cas d'équiprobabilité sur Ω :

$\star$ pour toute issue ω, $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$

$\star$ pour tout événement A de $\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}$

La probabilité ainsi définie s'appelle ***probabilité uniforme sur*** Ω.

Exemples :

• Dans l'expérience où on lance un dé équilibré, le mot « équilibré » sous-entend qu'il y a équiprobabilité des différentes issues de l'univers $[\![1;6]\!]$, et donc chaque nombre sort avec une probabilité ....
Alors, si A est l'événement « obtenir un nombre pair », alors $A =$ .... donc $\text{Card}(A) = \ldots$ donc $\mathbf{P}(A) =$

De même $\mathbf{P}($« obtenir un nombre plus grand que 5 »$) =$

Remarque : que le dé soit équilibré ou non, $\Omega = [\![1;6]\!]$ toujours, ce sont ensuite les probabilités qui changent éventuellement.

• Dans l'expérience aléatoire 4 de la boîte à 6 boules noires et 4 boules blanches, toutes *indiscernables* : il y a équiprobabilité sur chaque boule, c'est-à-dire sur $\Omega = [\![1;10]\!]$.

Il y a alors .... issues favorables à l'événement « obtenir une boule noire », donc $\mathbf{P}($« obtenir une boule noire »$) =$

Ainsi, il n'y a pas équiprobabilité si l'on considère l'univers $\Omega = \{\text{N};\text{B}\}$: $\mathbf{P}(\text{N}) = \ldots\ldots$ et $\mathbf{P}(\text{B}) = \ldots\ldots$

Remarque : dans le cas d'équiprobabilité, les calculs de probabilités d'événements sont essentiellement des calculs de cardinaux d'ensembles, qu'il faut effectuer avec la plus grande rigueur !

3) Propriétés d'une probabilité

Les propriétés sur les cardinaux se généralisent alors aux probabilités :

Propriété.

Soit Ω un univers fini, muni d'une probabilité $\mathbf{P}$, alors :

⋆ $\boxed{\mathbf{P}(\emptyset) = 0}$

⋆ pour tout événement A, $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1$, ou $\boxed{\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)}$.

⋆ pour tous événements A et B : $\boxed{\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)}$.

⋆ si A et B sont deux événements avec $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$.

Exemple : expérience 3, lancer deux dés équilibrés.

1. On avait défini l'événement A : « la somme obtenue est supérieure ou égale à 10 ». Calculer $\mathbf{P}(A)$.

2. On définit D « obtenir deux nombres différents ». Calculer $\mathbf{P}(D)$.

3. On pose E « obtenir deux nombres pairs ou deux nombres supérieurs ou égaux à 3 ». Déterminer $\mathbf{P}(E)$.