Ensembles

Georg Cantor (1845 - 1918) est à l'origine de la théorie des ensembles. Il a notamment construit l'ensemble des réels à partir des rationnels, construction formalisée par Richard Dedekin (1831 - 1916). La théorie des ensembles donne lieu à de multiples questions tortueuses, voire des paradoxes.

Le plus célèbre des paradoxes est probablement le paradoxe de Russel (Bertrand Russel, 1872 - 1970), qui peut se traduire en langage imagé par : le barbier d'un village rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes ; le barbier doit-il se raser ?

Définition.

Un ***ensemble*** E est constitué d'***éléments*** x qui sont dits ***appartenir*** à E. On note $x \in E$.

I. Notations des ensembles

On note en général les ensembles avec des accolades $\{\dots\}$ qui se lisent « ensemble de … », et à l'intérieur, la description des éléments de l'ensemble, cette description peut prendre plusieurs formes :

- la liste des éléments qui le constituent, par exemple :
  $E = \{3; -7; 49\}$ « E est l'ensemble constitué des éléments 3, -7 et 49 ».
  $\mathbb{N} = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$
- la description précise des éléments, par exemple :
  $F = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n^2+3} \leqslant 10^{-5}\right\}$ « F est l'ensemble des entiers naturels n qui vérifient l'inégalité $\frac{1}{n^2+3} \leqslant 10^{-5}$ »
  $G = \{2p \mid p \in \mathbb{N}\}$ « G est l'ensemble des nombres $2p$ obtenus lorsque p décrit l'ensemble des entiers naturels »
  on peut aussi écrire $G = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{il existe } p \in \mathbb{N}, n = 2p\}$ « G est l'ensemble …

On dispose aussi d'écritures spécifiques pour les intervalles :

- $[a, b]$ ……………………………………………………………………
- $[\![a, b]\!]$ ……………………………………………………………………

On rappelle que l'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé ***ensemble vide***, et il se note $\emptyset$.
Ainsi, $\emptyset = \{\}$.

Définition.

Si A est un ensemble tel que tous les éléments de A sont des éléments de E, on dit que A est un ***sous-ensemble*** de E ou une ***partie*** de E.
On note $A \subset E$ « A est inclus dans E ».
L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarques de notation : A est une partie de E se note $A \subset E$ mais aussi $A \in \mathcal{P}(E)$.
Et si x est un élément de l'ensemble A, on note $x \in A$ ou $\{x\} \subset A$.

Exemple : si $E = \{a; b; c\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{ \dots$.

Méthode : pour montrer qu'un ensemble A est une partie de E, on montre que si un élément x est dans A, alors il est aussi dans E.
Par exemple, si $A = \{10p \mid p \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{2p \mid p \in \mathbb{N}\}$, montrons que $\dots \subset \dots$:

Méthode : pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on peut procéder par ***double-inclusion*** : on montre que $A \subset B$ et que $B \subset A$.

Voir **Exercices 4.** et **5.**.

II. Opérations sur les ensembles

Définition.

Si E est un ensemble, et A et B sont deux parties de E, on peut définir de nouvelles parties de E :

- la ***réunion de** A **et** B*, notée $A \cup B$: c'est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ou dans B, $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
  Le *ou* est inclusif : les éléments à la fois dans A et B sont dans la réunion.

- l'***intersection de** A **et** B*, notée $A \cap B$: c'est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A et dans B, $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
  Deux ensembles sont ***disjoints*** si leur intersection est vide.

- le ***complémentaire de** A **dans** E*, noté $\complement_E A$ ou $E \backslash A$ ou (en l'absence d'ambiguïté sur l'ensemble de référence) $\overline{A}$: c'est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A, $\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$.

Remarque : la notation $\backslash$ s'utilise aussi plus généralement : $\boxed{A \backslash B = A \cap \overline{B} = \{x \in A \mid x \notin B\}}$.

Propriété. Règles de calcul.

Soit E un ensemble et A, B et C trois parties de cet ensemble.
- commutativité : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$;
- associativité : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ noté $A \cap B \cap C$ (......................................)
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ noté $A \cup B \cup C$;
- distributivité : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- lois de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Exemples : Soient $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \geqslant 0\}$.

1. Écrire A et B sous forme d'intervalles ou d'unions d'intervalles.

2. Exprimer $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$ et $A \cup B$.

Définition. Produit cartésien de deux ensembles.

Soient E et F deux ensembles.
Le ***produit cartésien de** E **par** F*, noté $E \times F$ est l'ensemble des couples $(x; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$,
$\boxed{E \times F = \{(x; y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}}$.
On note $E^2 = E \times E$.

Remarque : $E \times F$ se lit « E croix F », et E^2 se lit aussi « E au carré ».

Exemples : $E = \{2; 4; 11\}$ et $F = \{-1; \pi\}$, alors $E \times F =$ ....
$\mathbb{R}^2$ ....

Définition. Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.

Soient $E_1, E_2, \dots E_n$ des ensembles.
On définit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots x_n \in E_n\}$.
$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est appelé le produit cartésien de $E_1, E_2, \dots E_n$.

On note $E^p = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$ et un élément de E^p est appelé un p-uplet ou une p-liste d'éléments de E.

Attention : $(2; 3) \neq (3; 2)$ mais $\{2; 3\} = \{3; 2\}$.