Dénombrement

Exercice 1.

1. * Montrons que $v \circ u$ est surjective : soit $y \in G$, cherchons x dans E tel que $v \circ u(x) = y$.
On sait que v est surjective donc il existe z dans F tel que $v(z) = y$.
$y \in F$ et u est surjective, donc il existe x dans E tel que $u(x) = z$.
Ainsi, $v \circ u(x) = v(u(x)) = v(z) = y$.
Nous avons bien prouvé l'existence du x cherché, donc $v \circ u$ est surjective.
* Montrons que $v \circ u$ est injective : soient x et x' dans E tels que $v \circ u(x) = v \circ u(x')$.
Alors $v(u(x)) = v(u(x'))$.
Or v est injective, donc $u(x) = u(x')$, et comme u est injective aussi, alors $x = x'$.
Donc $v \circ u$ est injective.
* Donc $\boxed{v \circ u \text{ est bijective}}$.

2. E est fini de cardinal n, donc il existe une application bijective u de E dans $[\![1, n]\!]$.
Or f est bijective de E dans F, donc f^{-1} est bijective de F dans E.
Donc $u \circ f^{-1}$ est une application de F dans $[\![1, n]\!]$, et elle est bijective d'après **1.**.
Donc $\boxed{F \text{ est de cardinal } n}$.

Exercice 2.

1. Si f est injective, alors $f(E)$ et E sont de même cardinal.
Or Card(E)=Card(F), donc Card($f(E)$) =Card(F).
Or $f(E) \subset F$.
Donc $f(E) = F$.
Donc f est surjective.
Ainsi, f est injective et surjective, donc bijective.
Nous venons de montrer que, si Card(E) =Card(F) : f injective $\Rightarrow$ f bijective.
Or la réciproque est toujours vraie.
Donc $\boxed{\text{avec Card}(E) = \text{Card}(F) : f \text{ injective} \iff f \text{ bijective}}$.

2. Si f est surjective, alors $f(E) = F$, donc en particulier Card$f(E)$ =Card$F$.
Or Card(E) =Card(F) par hypothèse, donc Card($f(E)$) =Card(E).
Donc il y a autant d'antécédents que d'images, donc f est injective, donc bijective.
Donc, comme précédemment, $\boxed{\text{dans le cas où Card}(F) = \text{Card}(E),\ f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}}$.

Exercice 5.

Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20.

1. On tire simultanément 7 boules de l'urne.

(a) Chaque résultat est une ***partie de 7 boules parmi les 20*** que contient l'urne.
Il y a donc $\boxed{\binom{20}{7} \text{ résultats possibles}}$.

(b) Il s'agit ici de tirer dans les mêmes conditions nos 7 boules, mais parmi les 19 numérotées de 2 à 20.
Chaque résultat est donc une ***partie à 7 éléments de l'ensemble*** $[\![2, 20]\!]$, de cardinal 19.
On a donc $\boxed{\binom{19}{7} \text{ résultats possibles}}$.

(c) Pour former un tirage où p est le plus grand numéro tiré, il faut que la boule numérotée p soit piochée, et les 6 autres doivent être plus petites que p donc choisies parmi les $p - 1$ numérotées de 1 à $p - 1$.
Cela revient donc à former une ***partie de 6 éléments de l'ensemble*** $[\![1, p - 1]\!]$.
On a donc $\boxed{\binom{p-1}{6} \text{ résultats possibles}}$.

2. On tire successivement et sans remise k boules de l'urne, et on note les numéros tirés dans l'ordre d'apparition.

(a) Chaque résultat est ici une k-***liste d'éléments distincts de l'ensemble*** $[\![1,20]\!]$.
$\boxed{\text{Il y en a donc } \frac{20!}{(20-k)!}.}$

(b) Un tel tirage est formé en plaçant la boule 1 au début, puis en piochant $k-1$ boules parmi les 19 restantes, toujours sans remise.
Cela fait donc $\frac{19!}{(19-(k-1))!}$ soit $\boxed{\frac{19!}{(20-k)!} \text{ résultats possibles}}$.

3. On tire successivement et avec remise k boules de l'urne, et on note dans l'ordre les numéros tirés.

(a) Chaque résultat de tirage dans ces conditions est une k-***liste d'éléments de*** $[\![1,20]\!]$.
$\boxed{\text{Il y en a } 20^k.}$

(b) Pour former un tirage sans le numéro 20, on a 19^k possibilités.
Il y a donc $\boxed{20^k - 19^k \text{ tirages avec au moins une fois le numéro 20}}$.

(c) Pour former un tirage avec seulement deux numéros fixés, on forme une k-liste d'éléments de l'ensemble formé par ces deux numéros, et on retire les deux listes constituées d'un seul de ces deux numéros, cela fait donc 2^k-2 possibilités.
On multiplie ce nombre par le nombre de choix possibles des deux numéros parmi les 20 disponibles, qui est le nombre de parties à 2 éléments de $[\![1,20]\!]$, c'est-à-dire $\binom{20}{2}$.
$\binom{20}{2}(2^k-2) = \frac{20\times 19}{2}(2^k-2) = 20\times 19\times(2^{k-1}-1)$.
On aura au total $\boxed{20\times 19\times(2^{k-1}-1) \text{ tirages avec seulement deux numéros distincts}}$.

Exercice 6.

1. Enclencher le mode aléatoire revient à ranger dans un ordre fixé les 15 morceaux, c'est-à-dire former une ***permutation*** de l'ensemble des 15 morceaux.
$\boxed{\text{Il y a donc 15! écoutes possibles.}}$

2. Maxime doit ici sélectionner les 6 morceaux différents qu'il va écouter, dans l'ordre de l'écoute.
Il forme donc une 6-***liste de morceaux distincts pris dans l'ensemble des 15 morceaux***.
Il a donc $\boxed{\frac{15!}{6!} \text{ écoutes possibles}}$.
Si l'ordre n'importe pas à Maxime, il suffit de choisir simultanément les 6 morceaux à écouter parmi les 15. Il forme donc une partie de 6 éléments de l'ensemble des 15 morceaux.
Il y a donc $\boxed{\binom{15}{6} \text{ écoutes possibles}}$.

Exercice 8.

Pour attribuer les rôles, le metteur en scène prend les rôles un par un, et à chacun il associe un acteur, qui n'a pas déjà été sélectionné pour une autre rôle.
Il forme ainsi une ***application de l'ensemble des 9 rôles dans l'ensemble des 10 acteurs***, elle est ***injective*** car un acteur ne peut pas jouer deux rôles différents.
$\boxed{\text{Il y a donc } \frac{10!}{(10-9)!} \text{ possibilités, c'est-à-dire } 10\,!.}$

Autre rédaction possible : Pour attribuer les rôles, le metteur en scène peut choisir, successivement dans l'ordre des rôles, les 9 acteurs qui joueront. Il ne peut pas choisir le même acteur plusieurs fois car un seul acteur ne peut pas jouer plusieurs rôles.
Il forme ainsi une 9-***liste d'acteurs distincts***.
$\boxed{\text{Il y a donc } \frac{10!}{(10-9)!} \text{ possibilités, c'est-à-dire } 10\,!.}$