Dénombrement

* Exercice 1.

1. Résultat préliminaire : E, F et G sont trois ensembles, u est une application bijective de E dans F, et v est une application bijective de F dans G.
Montrer que $v \circ u$ est bijective.

2. Soient E et F deux ensembles, on suppose que E est fini de cardinal n, et qu'il existe une application f bijective de E dans F.
Montrer que F est de cardinal n.

* Exercice 2.

Soient E et F deux ensembles de même cardinal, et f une application de E dans F.

1. On suppose f injective, montrer que f est bijective.
En déduire que dans cette situation, f est injective $\iff f$ est bijective.

2. On suppose f surjective, montrer que f est bijective.
En déduire que dans cette situation, f est surjective $\iff f$ est bijective.

Exercice 3.

Dans un centre de vacances accueillant 120 personnes, on sait que 24 font du tennis et 15 du canoë. De plus on note que 6 personnes pratiquent à la fois tennis et canoë.
Combien de personnes ne pratiquent aucun des deux sports ?

Exercice 4.

1. À la cantine du lycée, il y a le choix entre 3 entrées, 2 plats, et 4 desserts, combien de menus sont possibles ?

2. De combien de façons différentes peut-on répartir p personnes sur une rangée de n chaises ?

3. Combien y a-t-il de nombres entier formés de 4 chiffres supérieurs ou égaux à 5 ? Et si l'on veux que ces 4 chiffres soient tous distincts ?

4. Combien de files indiennes différentes peuvent former 10 enfants ?

5. Lors d'un examen, on doit traiter 8 exercices au choix parmi 10, combien de choix sont possibles ?
Un élève décide de tirer au hasard les 8 exercices qu'il traite, quelle est la probabilité que le hasard lui donne à traiter les huit premiers ?

Exercice 5.

Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20.

1. On tire simultanément 7 boules de l'urne.
- **(a)** Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- **(b)** Combien de résultats ne comportent pas la boule 1 ?
- **(c)** Soit $p \in [\![7, 20]\!]$, déterminer le nombre de tirages possibles pour lesquels p est le plus grand numéro tiré.

2. On tire successivement et sans remise k boules de l'urne, et on note les numéros tirés dans l'ordre d'apparition.
- **(a)** Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- **(b)** Combien y a-t-il de tirages possibles commençant par la boule 1 ?

3. On tire successivement et avec remise k boules de l'urne, et on note dans l'ordre les numéros tirés.
- **(a)** Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- **(b)** Combien y a-t-il de tirages possibles contenant au moins une fois le numéro 20 ?
- **(c)** Combien y a-t-il de tirages possibles où seulement deux numéros distincts sont apparus ?

Exercice 6.

Sur son téléphone, Maxime a 15 morceaux de musique.

1. Il enclenche le mode « aléatoire ». Combien de possibilités d'écoute cela fait-il ?

2. Sur son trajet pour venir au lycée le matin, Maxime a le temps d'écouter 6 morceaux : combien de possibilités a-t-il ?
Combien d'écoutes sont possibles si l'on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel ces trois morceaux seront écoutés ?

Exercice 7.

Un jury est composé de 10 membres tirés au sort parmi 8 hommes et 9 femmes.

1. Combien de jurys différents peut-on former ?

2. Combien de jurys paritaires (5 hommes et 5 femmes) peut-on former ?

3. Monsieur X. refuse de siéger avec Madame Y. Combien de jurys peut-on former dans ces conditions ?

Exercice 8.

Une troupe de théâtre est formée de 10 acteurs.
Pour une pièce, il y a 9 rôles à jouer, tous différents.
Combien de possibilités d'attribution des rôles sont possibles ?

Exercice 9.

1. Calculer les nombres ou expressions suivant(e)s : $\binom{7}{0}$ $\binom{7}{3}$ $\binom{7}{4}$ $\binom{35}{33}$ $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{2}$.

2. Montrer en utilisant les formules, que $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.

3. Résoudre l'équation $\binom{n}{2} = 15$.

4. Simplifier $\dfrac{\binom{n+1}{p}}{\binom{n}{p}}$.

Exercice 10.

1. Développer $(2x-1)^5$, puis $(a+2b)^4$ puis $(1-\sqrt{3})^5$.

2. Quel est le coefficient de x^3 dans l'expression $(2+\frac{1}{2}x)^8$? et dans l'expression $(1-2x)^7$?

3. Exprimer en fonction de n les sommes suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k5^{n-k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k.$$

* **4.** Montrer que pour tout entier naturel n, $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ est un entier.

* Exercice 11.

1. On considère n boules, et deux boîtes A et B. On veut répartir p boules parmi les n dans les deux boîtes A et B, en en mettant une dans la boîte A et $p-1$ dans la boîte B.
En dénombrant les répartitions possibles de deux manières différentes, montrer que $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

2. Application : calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.