Nombres complexes B

Exercice 1.

Linéariser les expressions suivantes, puis donner une primitive de chacune des fonctions :
$f(x) = \sin^5(x)$; $g(x) = \sin^3(x)\cos^2(x)$; $h(x) = \cos^6(x)$ et $k(x) = \sin^6(x)$.

Exercice 2.

1. Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(3x)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

2. Exprimer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

* **3.** Dans l'expression de $\cos(5x)$, en prenant $x = \frac{\pi}{10}$, déterminer une équation polynomiale de degré 5 vérifiée par $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

* Exercice 3.

Déterminer tous les complexes z tels que $|z| = |\frac{1}{z}| = |1 - z|$.

Exercice 4.

1. Réduire la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$ où $n \geqslant 1$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

* Exercice 5.

Soient z et z' deux complexes de même module. Montrer que $\frac{(z+z')^2}{zz'}$ est un nombre réel positif.

Exercice 6.

Résoudre $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$ et $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 1$.

Exercice 7.

Résoudre : $z^2 = -1 + \sqrt{3}i$ $z^2 = 5 + 12i$ $z^2 = 2 - 2i$ $z^2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ $z^2 = 21 - 20i$.

Exercice 8.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $iz^2 + (i+3)z + 2 - 2i = 0$ **(b)** $2z^2 - (1+9i)z - 7 + 11i = 0$ **(c)** $3z^4 + 17z^2 + 20 = 0$

(d) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ **(e)** $z^6 + z^3 + 1 = 0$ **(f)** $z^2 + 4iz - 7 - 4i = 0$

pour (c) on pourra poser $Z = z^2$ et pour (e), $Z = z^3$

Exercice 9.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$ **(b)** $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ **(c)** $32 + iz^5 = 0$ **(d)** $z^3 = i$

Exercice 10.

On cherche à résoudre l'équation (E) : $z^3 + (3-i)z^2 + (4-3i)z - 4i = 0$.

1. Vérifier que i est solution de cette équation.

2. Déterminer a, b et c réels tels que $z^3 + (3-i)z^2 + (4-3i)z - 4i = (z-i)(az^2 + bz + c)$.

3. En déduire alors l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 11.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^{2z} - 6e^z + 12 = 0$.

Exercice 12.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on considère l'équation suivante dans $\mathbb{C}$ que l'on appellera $(\mathcal{E}_n)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = 0$.

1. Résoudre $(\mathcal{E}_2)$.

2. **(a)** Effectuer la division euclidienne de $z^3 + z^2 + z + 1$ par $z + 1$.

(b) En déduire les solutions de $(\mathcal{E}_3)$.

*** 3.** **(a)** Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$ pour $z \neq 1$, et en déduire les solutions de $(\mathcal{E}_n)$.
Ces solutions seront notées $(\alpha_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$.

(b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \alpha_k$.