Nombres complexes
B - Calculs trigonométriques et équations avec des complexes.

I. Utilisation des nombres complexes pour transformer des expression trigonométriques

1) $\cos^n(x)$, $\sin^n(x)$ **ou** $\cos(nx)$, $\sin(nx)$

a. Linéariser : de $\cos^n(x)$ **ou** $\sin^n(x)$ **à des combinaisons linéaires de** $\cos(kx)$ **ou** $\sin(kx)$

Intérêt : par exemple trouver des primitives, ou des solutions particulières d'équations différentielles ...

Méthode : Formules d'Euler, développement, et formules d'Euler dans l'autre sens.

rappel formules d'Euler : $\sin(\theta) =$ .... et $\cos(\theta) =$ ....

ou ....

rappel formule du binôme de Newton : $(a+b)^n =$ ....

Exemple : linéariser $\sin^3(x)$ et en déduire une primitive.

$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$

$= \dots$

Remarque : on peut aussi linéariser des produits de puissances de cosinus ou sinus, dans ce cas, bien terminer le développement avant de réutiliser les formules d'Euler. voir exercice 2. fonction g

b. Dé-linéariser : de $\cos(nx)$ **ou** $\sin(nx)$ **à des combinaisons linéaires de** $\cos^k(x)\sin^l(x)$

Intérêt : factoriser des expression, pour par exemple, résoudre une équation ou trouver le signe ...

Méthode : Formule de Moivre, développement, puis partie réelle ou imaginaire.

rappel formule de Moivre : ...

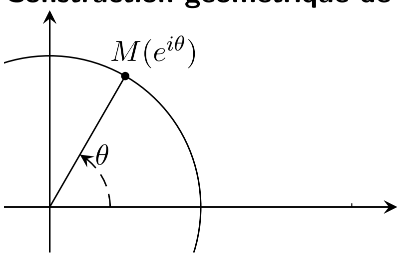
donc $\cos(nx) =$ .... et $\sin(nx) =$ ....

Exemple : pour résoudre l'équation $\cos(3x) + 4\cos(x) = 0$, on commence par transformer $\cos(3x)$.
Avec la formule de Moivre : $\cos(3x) = \mathrm{Re}\Big(\big(\cos(x) + i\sin(x)\big)^3\Big)$.
Or $\big(\cos(x) + i\sin(x)\big)^3 =$ ....

$=$ ....

2) Factorisation de $1 \pm e^{i\theta}$

Construction géométrique de $1 + e^{i\theta}$:



Calcul de $1 + e^{i\theta}$:

Généralisation au calcul de $e^{i\theta} \pm e^{i\theta'}$: utilisation de l'angle moyen.
Par exemple $e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{3}}$.

3) De $a\cos(t)+b\sin(t)$ à $A\cos(\omega t-\varphi)$

Propriété.
Soient a et b deux réels non nuls. Il existe un réel $A>0$ et un réel φ, tels que

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \ a\cos(t)+b\sin(t)=A\cos(t-\varphi).$$

Démonstration :

Exemple : résoudre l'équation $\cos(t)+\sqrt{3}\sin(t)=0$.

II. Équations remarquables dans $\mathbb{C}$

1) Polynômes de degré 2

a. Résoudre $z^2=\omega$ avec $\omega\in\mathbb{C}$

$\boxed{\text{Si } \omega\neq 0\text{, cette équation a toujours deux solutions dans } \mathbb{C}\text{, et elles sont opposées.}}$

Méthode :

- 1er cas : la forme trigonométrique de ω est simple : $\omega=\rho e^{i\theta}$.
  Les solutions de l'équation $z^2=\rho e^{i\theta}$ sont $\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
- Sinon : on cherche z sous forme algébrique $x+iy$.
  (i) $z^2=\dots$
  on en déduit deux équations : $\begin{cases}\dots\\ \dots\end{cases}$
  (ii) $|z^2|=|\omega|$, donc ...
  on calcule $|\omega|$ et on en déduit une troisième équation.
  (iii) on résout le système en trouvant d'abord x^2 (avec (1) et (3)), puis deux possibilités pour x et en utilisant (2), on trouve les deux possibilités associées pour y.

Exemple : résolvons $z^2 = 3 - 4i$.

b. Résoudre $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c complexes.

Les mêmes calculs que dans $\mathbb{R}$ sont valables !

> On calcule Δ :
> $\star$ si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution $-\frac{b}{2a}$;
> $\star$ si $\Delta \neq 0$, l'équation a deux solutions $\frac{-b-\delta}{2a}$ et $\frac{-b+\delta}{2a}$ avec δ tel que $\delta^2 = \Delta$.

Exemple : résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $-z^2 + \sqrt{3}z - i = 0$.

2) Racines n-ièmes : équations $z^n = \omega$

a. Racines n-ièmes de l'unité : solutions de $z^n = 1$

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle ***racine n-ième de l'unité*** tout complexe z tel que $z^n = 1$.
L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité se note $\mathbb{U}_n$.

Exemples : $\mathbb{U}_1 = \ldots\ldots$; $\mathbb{U}_2 = \ldots$

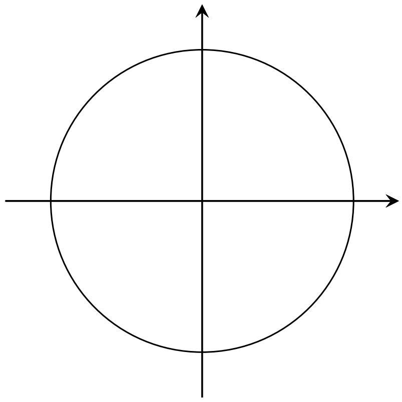
Théorème.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\} = \left\{ 1; e^{\frac{2i\pi}{n}}; e^{\frac{4i\pi}{n}}; \ldots; e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}} \right\}$$

Remarque : il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité distinctes.

Justification du théorème :



Propriété.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Démonstration :

b. Racines n-ièmes d'un nombre complexe : solutions de $z^n = \omega$

Théorème.

Pour tout nombre complexe non nul ω de forme trigonométrique $\rho e^{i\alpha}$, il existe n nombres complexes z tels que $z^n = \omega$. Ce sont les $z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\alpha}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$.

Remarques :

- $\sqrt[n]{\rho}$ est l'antécédent positif de ρ par la fonction réelle $x \mapsto x^n$, autrement dit $\sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}}$.
- On peut aussi écrire l'ensemble de ces racines sont forme $z_k = z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $z_0 = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n}}$ et $k \in [\![0; n-1]\!]$.

Exemple. Déterminons les racines 5-ièmes de $-16 + 16i\sqrt{3}$.