Nombres complexes A

Exercice 1.

On rappelle les formules suivantes : $\cos(a+b) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.
$\sin(a+b) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Démontrer que pour tous réels α et β, $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$.

Exercice 2.

Soit $z = a + ib$, on suppose $z \neq 0$, déterminer la forme algébrique de z^{-1}.

Exercice 3.

Soient $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = i\sqrt{3} - 1$.
Écrire sous forme algébrique les complexes $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $(z_1)^2$ et $\frac{z_1}{z_2}$.

Exercice 4.

Mettre sous forme algébrique :

(a) $z = i^3(3i - 2)$

(b) $z = \frac{i+5}{(3+2i)^2}$

(c) $z = \frac{1-3i}{1+3i}$

(d) $z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$

(e) $z = \frac{1-i}{i}$

(f) $z = \dfrac{1}{\frac{1}{1+i} - 1}$

(g) $z = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$

Exercice 5.

1. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ (mettre le résultat sous forme algébrique) :
$2z + 2i = iz \quad ; \quad 3z + 7 = 5\overline{z} - 2i \quad ; \quad (3+2i)z - 5i = -iz - 2 + 5i$

2. Pour chacune des équations suivantes, préciser pour quels z l'équation est définie, et la résoudre :
$\frac{z-i}{z+1} = 2i \quad ; \quad 5z = \frac{-i+3}{2\overline{z}}$

Exercice 6. Identité du parallélogramme.

Démontrer que pour tous z et z' de $\mathbb{C}$, $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.
Quel est le rapport avec un parallélogramme ?

Exercice 7.

Mettre sous forme trigonométrique :

(a) $z = -11$

(b) $z = 2i$

(c) $z = 1 + i$

(d) $z = (1+i)^{2019}$

(e) $z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i}$

(f) $z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

(g) $z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$

(h) $z = -10e^{i\pi}\left(\dfrac{2e^{i\frac{5\pi}{8}}}{e^{i\frac{7\pi}{4}}}\right)^6$

Exercice 8.

Soit z le nombre complexe $z = (1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3})$.

1. Déterminer la forme algébrique de z^2.

2. Déterminer le module et un argument de z^2 et en déduire ceux de z.

Exercice 9.

Donner la forme trigonométrique de $z_1 = 2(\cos(\theta) - i\sin(\theta))$ et $z_2 = i(\cos(-\theta) + i\sin(\theta))$.

Exercice 10.

Soient A, B et C des points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = 2 - i$, $z_B = 1$ et $z_C = 4 - 3i$.
A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 11.

Résoudre $|z - 1| = |z - i|$ et interpréter géométriquement.

Exercice 12.

Soient A, B et C des points d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 4 + i$ et $z_C = 5 + 3i$.
Déterminer l'affixe d'un point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 13.

ABC est un triangle, on appelle I et J les milieux respectifs de AB et AC.
Démontrer que $(BC) \,//\, (IJ)$ et que $BC = 2IJ$.

* Exercice 14.

On note A le point d'affixe 1 et pour tout $z \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$, on considère M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z' défini par $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$.

1. À quelle condition sur M a-t-on $A = M'$?

2. **(a)** Démontrer que $z' \in \mathbb{U}$ et interpréter graphiquement cette propriété.

(b) Démontrer que $\frac{z'-1}{z-1} \in \mathbb{R}$ et interpréter graphiquement cette propriété.

3. Donner une construction géométrique de M' connaissant M.

Exercice 15.

Soient A, B et C les points d'affixes $z_A = -1 - 3i$; $z_B = 3 - 5i$ et $z_C = 7 + 3i$.

1. Que peut-on dire du triangle ABC ?

2. On note D le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.
Déterminer la nature des triangles BCD et ACD.

Exercice 16.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, et représenter les solutions dans le plan complexe.

(a) $e^z = 2$ **(b)** $e^z = -4$ **(c)** $e^z = 7 - 7i$.