Applications

Exercice 1.

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes, puis écrire leurs négations.
1. f est à valeurs positives. **2.** f s'annule. **3.** f est constante.

Exercice 2.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Déterminer : $f([-1,4])$, $f^{-1}([-1,4])$, $f(]-\infty,3])$, $f^{-1}(f([0,1]))$ et $f(f^{-1}([-3,2]))$.

Exercice 3.

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$.
Montrer que f est injective mais n'est pas surjective.

2. Soit g application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
g est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4.

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^+ \\ z & \mapsto & |z| \end{array}$

3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,x') & \mapsto & (x+x', xx') \end{array}$

4. $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathbb{R}^+ \\ M & \mapsto & d(M,\mathcal{D}) \end{array}$ où $\mathcal{P}$ est le plan $\mathcal{D}$ est une droite du plan fixée, et $d(M,\mathcal{D})$ représente la distance entre le point M et la droite.

Exercice 5.

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ est-elle injective ?

Exercice 6.

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 7$.
Justifier que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 7.

Les applications suivantes sont-elles bijectives ? si oui déterminer la réciproque.

$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$

$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$

$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \bar{z} \end{array}$

$k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{3\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{-1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+2}{3-x} \end{array}$

Exercice 8.

L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$ est-elle bijective ?

***** Comment réduire les ensembles pour que ce soit le cas ?

* Exercice 9.

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des bijections.
Montrer que $g \circ f$ est une bijection de E dans G et que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.