Techniques sur les espaces vectoriels

Attention : cette fiche n'est que le regroupement des méthodes du cours, elle ne se substitue pas à l'apprentissage du cours ! Toujours se reporter aux définitions et propriétés du cours pour garder à l'esprit le sens des objets manipulés et comprendre les calculs présentés ici.

Attention : les méthodes présentées ci-dessous ne sont pas exhaustives, il s'agit de pistes pour ne pas rester sans rien faire devant un exercice. Mais selon le contexte de l'exercice, d'autres méthodes peuvent être utilisées, il faut bien suivre les indications de l'exercice.

Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E :

→ première possibilité : ⋆ Justifier que $\mathbf{0} \in F$.
⋆ « Soient x et y dans F, $\lambda \in \mathbb{K}$, montrons que $x + \lambda y \in F$. »

→ deuxième possibilité : F sera un sous espace vectoriel si on parvient à l'écrire sous forme $\text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.

→ troisième possibilité : F est le noyau (ou l'image) d'une application linéaire.

La famille (f_1, f_2, ... f_p) est-elle libre dans E ?

<u>Cas particuliers :</u>

→ on trouve un vecteur qui s'exprime à partir des autres : la famille est liée ;

→ une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si les vecteurs ne sont pas colinéaires ; (attention, ne fonctionne pas avec 3 vecteurs ou plus ! !)

→ une famille de polynômes de degrés échelonnés (tous distincts) est libre ;

→ une famille de p vecteurs dans un espace de dimension n avec $p > n$ n'est pas libre (elle est liée) ;

→ si on connaît les coordonnées des vecteurs de la famille dans une base, on peut former la matrice des coordonnées des vecteurs en colonne : la famille de p vecteurs est libre si et seulement si le rang de la matrice est p.

<u>Cas général :</u>

« Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_p f_p = \mathbf{0}$.
Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$ ».

Que faire avec une égalité du type $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$?

→ dans un espace de type $\mathbb{K}^n$: cette égalité se traduit en un système à n équations (une équation par coordonnée)

→ dans un espace de matrices $\mathcal{M}_{n,m}$: même chose, avec $n \times m$ équations (une équation par « position » dans la matrice)

→ avec des polynômes : on regroupe les termes constants, les termes en X, les termes en X^2... et on identifie des deux côtés de l'égalité

→ dans un espace de fonctions définies sur I, elle se traduit par autant d'équations que de x dans I :

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p \iff \forall x \in I,\ v(x) = \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + \ldots + \lambda_p u_p(x)$$

pour trouver des relations sur les λ_k, on peut choisir les valeurs de x qui nous arrangent (ou éventuellement dériver les fonctions, regarder leurs limites ...)
mais attention l'égalité de départ sera vraie si la relation est vraie pour TOUS les x.

→ dans un espace de suites : idem, une équation par valeur d'indice.

Pour montrer que la famille (f_1, f_2, ... f_p) est une base de E :

→ on montre que la famille est libre et génératrice ;

→ si on connaît la dimension de E :
⋆ la famille a autant de vecteurs que la dimension et est libre ;
⋆ OU la famille a autant de vecteurs que la dimension et est génératrice.

→ recollement de deux bases : si $E = F \oplus G$ et $\mathcal{F}$ est une base de F, $\mathcal{G}$ une base de G, alors $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est une base de E.

Déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel :

→ trouver une base et compter le nombre de vecteurs.

→ si on connaît une famille génératrice (l'espace s'écrit comme $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p)$), la dimension est le rang de $(f_1, f_2, \dots, f_p)$.

Attention : $F = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, \dots, f_p)$ ne garantit pas que la famille (f_i) est une base, il faut vérifier que c'est une famille libre.

Montrer que $E = F \oplus G$:

Cas général :

→ première possibilité :

- ⋆ montrer que $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$ (c'est-à-dire la somme est directe) :
  ≪ soit $x \in F \cap G$, montrons que $x = \mathbf{0}$ … ≫
- ⋆ montrer que $F + G = E$: ≪ soit $x \in E$, déterminons $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$ ≫ (par analyse et synthèse, ou intuition et synthèse …)

→ deuxième possibilité :

≪ soit $x \in E$, montrons qu'il existe un ***unique*** couple (f, g) avec $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$ ≫.
(par analyse et synthèse)

En dimension finie :

→ première possibilité :

- ⋆ montrer que $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$
- ⋆ montrer que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

→ deuxième possibilité (*plus compliqué a priori*) :

- ⋆ montrer que $F + G = E$
- ⋆ montrer que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

→ troisième possibilité : si $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est une base de F et $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ est une base de G, on montre que $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_n)$ est une base de E.

Noyau et image d'une application linéaire : soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$

- pour trouver $\mathrm{Ker}(\varphi)$:
  → résoudre $\varphi(x) = \mathbf{0}$ (système, coefficients du polynôme …)
- pour trouver $\mathrm{Im}(\varphi)$:
  → si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base (ou juste une famille génératrice) de E (on peut prendre la base canonique), alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))$.
  → si φ est définie par une relation du type $\varphi(x, y, z) = (3x - 4y, x + z)$:
  on note que $(3x - 4y, x + z) = x(3, 1) + y(-4, 0) + z(0, 1)$
  alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\,((3, 1), (-4, 0), (0, 1))$
  Attention : dans ces cas, on trouve une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$, et pas forcément une base !
- utiliser le théorème du rang pour déduire la dimension de l'image de celle du noyau, et pouvoir extraire une base de la famille génératrice trouvée pour l'image.

Matrices et applications linéaires :

- écrire la matrice de φ de la base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ vers la base $(f_1, f_2, \dots, f_n)$:
  calculer $\varphi(e_1)$, l'écrire $\varphi(e_1) = \dots f_1 + \dots f_2 + \dots + \dots f_n$ et mettre ces coefficients dans la 1ère colonne, puis faire pareil avec $\varphi(e_2)$ …
- interpréter la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de φ de la base (e_1, e_2, e_3) vers la base (f_1, f_2) signifie :
  $\varphi(e_1) = 1f_1 + 0f_2$, $\varphi(e_2) = 0f_1 - 2f_2$, $\varphi(e_3) = -3f_1 + f_2$.
- construire une matrice de passage : de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$
  on écrit $e'_1 = \dots e_1 + \dots e_2 + \dots + \dots e_p$ et on met ces coefficients dans la 1ère colonne, puis on fait pareil avec e'_2 …
- changer de base : $\boxed{\text{appliquer la formule } A' = Q^{-1}AP}$
  avec $Q = P_{\mathcal{F} \to \mathcal{F}'}$ et $P = P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$
  $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)$ et $A' = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(\varphi)$