Ensemble $\mathbb{N}$ et raisonnement par récurrence.

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}$:

(a) montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant -\frac{2}{3}$

(b) montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{5}{3}(\frac{1}{2})^n - \frac{2}{3}$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

4. Montrer que : $\forall n \geqslant 0, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$.

5. Montrer que $\forall a > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^n) = n\ln(a)$.
(on utilisera uniquement la formule $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ valable pour tous a et b de $]0, +\infty[$)

6. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$.
(on utilisera la formule $|zz'| = |z||z'|$ valable pour tous z et z' de $\mathbb{C}$)

7. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^x$.
Montrer que $\forall n \geqslant 1$, la dérivée n-ième de f est $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x$.

8. Démontrer qu'à partir d'un certain rang à déterminer, $100n \leqslant 2^n$.

9. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_1 = 5$ et $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$.
Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 2 + 3n$.

10. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$, et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$.

11. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 3$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \frac{2}{n}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)$.

(a) Calculer u_2, u_3, u_4.

(b) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = 3n$.

*** 12.** Soit x dans $\mathbb{R}$, quelconque.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et $u_1 = 2\cos(x)$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2\cos(x)u_{n+1} - u_n$.
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2\cos(nx)$.

13. Que pensez-vous du raisonnement suivant ?
Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : n crayons de couleur sont tous de la même couleur.

Initialisation : : $\mathcal{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire k crayons sont toujours de la même couleur.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Soient $k+1$ crayons. On en retire un. Les k crayons restant sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.
Reposons ce crayon et retirons-en un autre. Les k crayons sont à nouveau de la même couleur, donc le premier crayon retiré est bien de la même couleur que tous les autres.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que pour tout n, tout paquet de n crayons est formé d'une seule couleur.