Devoir Surveillé n° 27

Le samedi 30 mai, 8h-12h.

Le sujet comporte 7 exercices et 4 pages.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
La notation prendra en compte la présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction (lexique, syntaxe).
La clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

Aucune justification n'est demandée ici.

1. $\begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. .... ☐ VRAI ☐ FAUX

2. F est l'ensemble des suites réelles croissantes.
F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. .... ☐ VRAI ☐ FAUX

3. $\mathbb{R}^2$ admet une famille liée de deux vecteurs. .... ☐ VRAI ☐ FAUX

4. Toute famille de $n+1$ polynômes distincts appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
.... ☐ VRAI ☐ FAUX

5. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E.
$\mathrm{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = n$ si et seulement si la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est libre. .... ☐ VRAI ☐ FAUX

6. Toute famille extraite d'une famille génératrice d'un espace vectoriel E est génératrice de E.
.... ☐ VRAI ☐ FAUX

7. Toute famille extraite d'une famille libre est libre. .... ☐ VRAI ☐ FAUX

8. Si u_1, u_2 et u_3 ne sont pas colinéaires 2 à 2, alors $\dim(u_1, u_2, u_3) = 3$ .... ☐ VRAI ☐ FAUX

9. X est une variable aléatoire.

(a) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $V(X+a) = V(b-X)$ .... ☐ VRAI ☐ FAUX

(b) Deux issues différentes peuvent correspondre à la même valeur de X .... ☐ VRAI ☐ FAUX

(c) Deux valeurs de X différentes peuvent correspondre à la même issue .... ☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 2.

1. Dans chacun des cas, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer sa dimension.

(a) $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\}$

(b) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$

(c) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et F est l'ensemble des suites arithmétiques.

2. Soient f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \sin(2x)$ et $f_3(x) = \sin(3x)$.
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

3. On appelle E l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles, et on pose $F = \{(u_n) \in E \mid u_2 = u_4 = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3.

On considère les matrices $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On appelle E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

On pourra noter $M_{(a,b,c)} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de base (I_3, A, B).
En déduire la dimension de E.

2. **(a)** Calculer A^2 et l'exprimer à l'aide des matrices I_3 et B.
En déduire les coordonnées de la matrice A^2 dans la base (I_3, A, B).

(b) Déterminer les coordonnées de A^3 dans la base (I_3, A, B).

(c) Déterminer le rang de la famille (A, A^2, A^3).

Exercice 4.

Les chiffres de cet exercice ne découlent pas d'une analyse scientifique de la situation actuelle ...
Dans une ville, une proportion p de la population est atteinte par un virus contagieux. Si une personne est en contact avec une personne contaminée, il y a 2 chances sur 3 qu'elle attrape la maladie.
Un représentant de commerce (en bonne santé) décide de rendre visite à n habitants de cette ville (*non recommandé en période de pandémie*).

1. On note N la variable aléatoire du nombre de malades rencontrés par le représentant.
Quelle est la loi de N ? On précisera l'ensemble des valeurs prises par N et la probabilité de chacune.

2. **(a)** Si le représentant rencontre k malades, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas contaminé ?

(b) On note C l'événement « à la fin de sa tournée, le représentant est contaminé ».
En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $\mathbf{P}(\overline{C})$ et en déduire la probabilité qu'il soit contaminé à la fin de la tournée.

Exercice 5.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère une urne contenant :
⋆ une boule numérotée 1
⋆ deux boules numérotées 2
⋆ ...
⋆ n boules numérotées n.

1. On tire une boule dans cette urne, on note X la variable aléatoire représentant le numéro de la boule obtenue.

(a) Déterminer le nombre total de boules dans l'urne.

(b) Déterminer la loi de X et vérifier en particulier que $\mathbf{P}(X = n) = \frac{2}{n+1}$.

(c) On précise que pour tout entier n non nul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Calculer l'espérance de X en fonction de n.

2. On tire maintenant 10 fois une boule avec remise dans cette urne, on note Y la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'on a obtenu une boule numérotée n.

(a) Déterminer la loi de Y.
Déterminer, en fonction de n, une expression de la probabilité que l'on pioche 3 fois une boule numérotée n.

(b) Donner la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

Exercice 6.

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$.
On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

1. On définit la fonction h sur $[a, b]$ par $h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$.
Montrer que le théorème de Rolle s'applique à h.

2. En déduire qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Exercice 7.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0, 1[$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}.$$

On introduit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. **(a)** Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

(b) En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie.

(c) Déduire de la question **1.(a)** que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ et en déduire que $f(x) \in [0, 1]$.

(d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

2. **(a)** Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.
On détaillera les calculs effectués.
Déterminer le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Justifier que f réalise une bijection de $[\frac{1}{2}, +\infty[$ sur un intervalle à déterminer

(c) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1], |f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.
on pourra encadrer le numérateur, et le dénominateur de $f'(x)$ en utilisant **1.(c)**.

3. **(a)** Calculer $f(1)$.

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |1 - u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}|1 - u_n|$.

(c) En déduire alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|1 - u_n| \leqslant \dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^n}|1 - u_0|$.

(d) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.