Correction du DS n° 7

Correction 2.

1. **(a)** $F = \{(2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left((2,1)\right)$.
$(2,1)$ n'est pas le vecteur nul, donc $\underline{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2 \text{ de dimension } 1.}$

(b) $(x,y,z) \in G \iff x = 2y \iff (x,y,z) = (2y,y,z) \iff (x,y,z) = y(2,1,0) + z(0,0,1)$
Donc $G = \text{Vect}\left((2,1,0),(0,0,1)\right)$.
Donc $\underline{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.
$((2,1,0),(0,0,1))$ est une famille génératrice de G, et les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc ils forment une famille libre, donc une base.
Donc $\underline{G \text{ est de dimension } 2}$.

(c) (u_n) est une suite arithmétique si et seulement si il existe r dans $\mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.
Ainsi, en notant v la suite constante égale à 1 et w la suite de terme général n, on a
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times v_n + r \times w_n$, autrement dit $(u_n) = u_0(v_n) + r(w_n)$.
Donc $F = \text{Vect}\,(v,w)$, donc $\underline{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.
Montrons que v et w forment une famille libre.
Soient λ et μ des réels tels que $\lambda u + \mu v = \mathbf{0}$
Alors, pour $n = 0$, on a $\lambda = 0$ et pour $n = 1$, $\lambda + \mu = 0$ donc $\mu = 0$.
Donc la famille est libre, donc $\underline{F \text{ est de dimension } 2}$.

2. Soient λ_1, λ_2 et λ_3 des réels tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$, montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Alors, pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $\lambda_1 + 0 - \lambda_3 = 0$, donc $\lambda_1 = \lambda_3$.
Pour $x = \frac{\pi}{4}$, on a $\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_3 = 0$ soit $\sqrt{2}\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (1)
Pour $x = \frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ soit $\frac{3}{2}\lambda_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 = 0$ donc $\sqrt{3}\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (2).
$(1) - (2)$ donne $(\sqrt{3} - \sqrt{2})\lambda_1 = 0$ donc $\lambda_1 = 0$ (car $\sqrt{2} \neq \sqrt{3}$)
Donc $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_2 = 0$.
Donc $\boxed{\text{la famille } (f_1, f_2, f_3) \text{ est libre}}$.

3. ⋆ La suite nulle est dans F car cette suite a tous ses termes nuls, en particulier le terme de rang 2 et le terme de rang 4.
⋆ Soient u et v des suites de F, et λ dans $\mathbb{R}$, montrons que $u + \lambda v$ est dans F.
Par définition des opérations dans E, $u + \lambda v = (u_n + \lambda v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Donc en particulier le terme de rang 2 de $u + \lambda v$ est $u_2 + \lambda v_2$ ce qui vaut $0 + \lambda 0$ (car u et v sont dans F), donc 0.
De même, le terme de rang 4 est $u_4 + \lambda v_4 = 0 + \lambda 0 = 0$.
Donc la suite $u + \lambda v$ est dans F.
Donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

Correction 3.

1. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix} = aI_3 + bA + cB$.
Autrement dit $E = \text{Vect}\,(I_3, A, B)$, donc $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
De plus, (I_3, A, B) est génératrice de E, montrons qu'elle est libre.
Soient α, β et γ tels que $\alpha I_3 + \beta A + \gamma B = \mathbf{0}$.
Alors $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \alpha+\gamma & \beta \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc entre autres, d'après la première ligne, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Donc $\boxed{(I_3, A, B) \text{ est une base de } E}$, la base contient 3 vecteurs donc $\boxed{E \text{ est de dimension } 3}$.

2. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + B = 1I_3 + 0A + 1B.$

Donc $\boxed{\text{les coordonnées de la matrice } A^2 \text{ dans la base } (I_3, A, B) \text{ sont } (1,0,1)}$.

(b) $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A$ donc $\boxed{\text{ses coordonnées dans la base } (I_3, A, B) \text{ sont } (0,2,0)}$.

(c) Les coordonnées de A dans cette base sont $(0,1,0)$.

Donc la matrice des coordonnées en colonnes de la famille (A, A^2, A^3) est $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$S \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (avec $L_1 \leftrightarrow L_2$) et donc $S \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

S est a deux pivots, donc $\boxed{\text{la famille } (A, A^2, A^3) \text{ est de rang } 2}$.

Correction 4.

1. Le représentant répète n fois la même épreuve « rencontrer une personne ».
Les épreuves sont considérées indépendantes les unes des autres car il visite des personnes différentes.
Pour chaque épreuve, on appellera succès l'issue « la personne rencontrée est malade », la probabilité de cette issue est p.
Ainsi, N compte le nombre de succès donc $\boxed{N \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p}$.

$$\boxed{N(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in N(\Omega),\ \mathbf{P}(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

2. (a) On note B_i l'événement « il n'est pas contaminé par la personne i ».

Alors $\mathbf{P}(\text{« il n'est pas contaminé »}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i\right)$.

Les personnes sont différentes donc les événements B_i sont indépendants les uns des autres, donc $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}(B_i) = \left(\frac{1}{3}\right)^k$.

Donc $\boxed{\text{la probabilité qu'il ne soit pas contaminé est } \left(\tfrac{1}{3}\right)^k}$.

(b) Les événements $(N = k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ forment un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\overline{C}) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(N=k)\mathbf{P}_{(N=k)}(\overline{C}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k \qquad \text{(questions précédentes)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}p\right)^k (1-p)^{n-k} \\
&= \left(\tfrac{1}{3}p + 1 - p\right)^n \qquad \text{(formule du binmôme de Newton)} \\
&= \left(1 - \tfrac{2p}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité que le représentant soit contaminé à la fin de la tournée est } \left(1 - \tfrac{2p}{3}\right)^n.}$$

Correction 5.

1. (a) Dans l'urne il y a 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2 etc jusqu'à n boules numérotées n.
Il y a donc $1+2+3+\ldots+n$ boules au total, soit $\sum_{k=1}^{n} k$ c'est-à-dire $\boxed{\frac{n(n+1)}{2} \text{ boules au total}}$.

(b) $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Pour tout k, l'événement $(X=k)$ est réalisé pour k tirages, et il y a $\frac{n(n+1)}{2}$ tirages possibles (on peut les supposer équiprobables, les boules n'étant pas a priori discernables), ainsi, $\mathbf{P}(X=k) = \frac{k}{\frac{n(n+1)}{2}} = \boxed{\frac{2k}{n(n+1)}}$.
En particulier, $\mathbf{P}(X=n) = \frac{2n}{n(n+1)} = \boxed{\frac{2}{n+1}}$.

(c) $E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{2k}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\boxed{E(X) = \frac{2n+1}{3}}$.

2. (a) On répète 10 fois la même expérience : piocher une boule dans la boîte et regarder son numéro.
Ces répétitions sont indépendantes car on remet la boule tirée dans la boîte avant de piocher la suivante.
Pour chaque expérience, on appelle succès l'événement « piocher une boule numérotée n », de probabilité $\frac{2}{n+1}$.
Y compte le nombre de fois où on a pioché une boule n, soit le nombre de succès sur les 10 répétitions.
Donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{2}{n+1}\right)}$.
On calcule $1 - \frac{2}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$, donc $\boxed{\mathbf{P}(Y=3) = \binom{10}{3}\left(\frac{2}{n+1}\right)^3\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^7}$.

(b) $E(Y) = 10 \times \frac{2}{n+1} = \boxed{\frac{20}{n+1}}$ et $V(X) = 10 \times \frac{2}{n+1} \times \frac{n-1}{n+1} = \boxed{\frac{20(n-1)}{(n+1)^2}}$.

Correction 6.

1. ⋆ f et g sont continues sur $[a,b]$ donc leurs combinaisons linéaires aussi, donc h est continue sur $[a,b]$;
⋆ de même, h est dérivable sur $]a,b[$;
⋆
$$\begin{aligned} h(a) &= (g(b)-g(a))f(a) - (f(b)-f(a))g(a) \\ &= g(b)f(a) - g(a)f(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a) \\ &= f(a)g(b) - f(b)g(a) \\ h(b) &= (g(b)-g(a))f(b) - (f(b)-f(a))g(b) \\ &= g(b)f(b) - g(a)f(b) - f(b)g(b) + f(a)g(b) \\ &= f(a)g(b) - f(b)g(a) \end{aligned}$$
Donc $h(a) = h(b)$.

Donc h vérifie les trois hypothèses du théorème de Rolle.

2. Donc d'après ce théorème, il existe c dans $]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$.
Or $\forall x \in]a,b[, h'(x) = (g(b)-g(a))f'(x) - (f(b)-f(a))g'(x)$.
Donc $h'(c) = 0$ se traduit par $(g(b)-g(a))f'(c) = (f(b)-f(a))g'(c)$.
Comme $g'(c) \neq 0$, on déduit de l'égalité que $g(b)-g(a) \neq 0$ et $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
Ainsi, $\boxed{\text{il existe } c \text{ dans }]a,b[\text{ tel que } \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$.

Correction 7.

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = x^2-2x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$
$= \underline{x^2-x+1}$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \geqslant 0$, et la racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$, f étant la composée de ces deux fonctions, <u>elle est définie sur $\mathbb{R}$</u>.

Pour tout n, on appelle $\mathcal{P}(n)$ la proposition : u_n est bien défini.

Initialisation : u_0 est entre 0 et 1 et est bien défini : $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire u_k est bien défini.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

u_k est défini, et f est définie sur $\mathbb{R}$, donc $f(u_k)$ existe, donc u_{k+1} est bien défini.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ est bien défini}}$.

(c) $\forall x \in [0,1]$, $-\frac{1}{2} \leqslant x-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ donc $0 \leqslant (x-\frac{1}{2})^2 \leqslant \frac{1}{4}$ donc d'après **1.(a)**, $\frac{3}{4} \leqslant x^2-x+1 \leqslant 1$.
La fonction racine carrée est croissante, donc $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sqrt{x^2-x+1} \leqslant \sqrt{1}$.
Donc $\boxed{\text{pour } x \in [0,1],\ f(x) \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]}$ et puisque $\frac{\sqrt{3}}{2} \geqslant 0$, on a aussi $\boxed{f(x) \in [0,1]}$.

(d) On note $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in [0,1]$.
Initialisation : $u_0 \in]0,1[$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_k \in [0,1]$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Par hypothèse, $u_k \in [0,1]$, donc d'après la question précédente, $f(u_k)$ est dans $[0,1]$ aussi, c'est-à-dire $u_{k+1} \in [0,1]$.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]}$.

2. (a) D'après la question **1.(a)** on peut montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2-x+1>0$.
Or $x \mapsto x^2-x+1$ est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction racine carrée est dérivable sur $]0,+\infty[$, donc la composée <u>f est dérivable sur $\mathbb{R}$</u>.
On utilise la formule $\sqrt{u}' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x)=x^2-x+1$ donc $u'(x)=2x-1$.

Alors $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}}$.

Le résultat d'une racine carrée est toujours positif, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2x-1$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

La limite de x^2-x+1 en $-\infty$ et $+\infty$ est $+\infty$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ et idem en $-\infty$.
Et $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{3}{4}}$ d'après **1.(a)** ce qui est égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) ⋆ f est continue sur $[\frac{1}{2},+\infty[$;
⋆ f est strictement croissante sur $]\frac{1}{2},+\infty[$;
⋆ $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Donc d'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \left[\frac{1}{2},+\infty\right[\text{ sur } \left[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right[}$.

(c) La racine est à valeurs positives, donc pour x dans $[0,1]$, $|f'(x)| = \frac{|2x-1|}{2\sqrt{x^2-x+1}}$
⋆ pour $x \in [0,1]$, $-1 \leqslant 2x-1 \leqslant 1$, donc $0 \leqslant |2x-1| \leqslant 1$;
⋆ pour $x \in [0,1]$, on a vu que $f(x) \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$, soit $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sqrt{x^2-x+1} \leqslant 1$.

Donc $\sqrt{3} \leqslant 2\sqrt{x^2-x+1} \leqslant 2$

Les trois nombres sont strictement positifs, donc par inverse, $\frac{1}{\sqrt{3}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}} \geqslant \frac{1}{2}$;

En faisant le produit des inégalités, qui ne contiennent que des nombres positifs, on obtient : $0 \leqslant \frac{|2x-1|}{2\sqrt{x^2-x+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ainsi, $\boxed{\forall x \in [0,1], |f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}}$.

3. **(a)** $f(1) = \sqrt{1^2-1+1} = \sqrt{1} = \boxed{1}$.

(b) $\star$ f est continue sur $[0,1]$;

$\star$ f est dérivable sur $]0,1[$;

$\star$ $\forall x \in [0,1], |f'(x)| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$, donc on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à f entre u_n et 1, on obtient $|f(u_n) - f(1)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}|u_n - 1|$.

Or $f(1) = 1$ et $f(u_n) = u_{n+1}$, donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |1-u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}|1-u_n|}$.

(c) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $|1-u_n| \leqslant \dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^n}|1-u_0|$.

Initialisation : $\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^0} = \frac{1}{1} = 1$ donc l'inégalité est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $|1-u_k| \leqslant \dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^k}|1-u_0|$.

On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

En multipliant l'hypothèse de récurrence par $\frac{1}{\sqrt{3}}$, on obtient $\frac{1}{\sqrt{3}}|1-u_k| \leqslant \frac{1}{(\sqrt{3})^{k+1}}|1-u_k|$.

Or, d'après la question précédente, $|1-u_{k+1}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}|1-u_k|$. Donc $|1-u_{k+1}| \leqslant \frac{1}{(\sqrt{3})^{k+1}}|1-u_k|$.

CQFD

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ |1-u_n| \leqslant \dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^n}|1-u_0|}$.

(d) $\sqrt{3} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{3})^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(\sqrt{3})^n}|1-u_0| = 0$.

Donc, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Autrement dit, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 1}$.