Devoir « Surveillé » n° 6

Le vendredi 17 avril, 14h-18h.

Le sujet comporte 3 pages et 7 exercices.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
La clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Tous les calculs devront être justifiés.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

On note $P = 2X^4 - 8X^3 + \frac{29}{2}X^2 - \frac{19}{2}X + 2$.

1. Justifier que $\frac{1}{2}$ est une racine de P et déterminer sa multiplicité.

2. En déduire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2.

1. Calculer les limites des fonctions ou suites aux endroits indiqués :

- $f(x) = \frac{\ln(1-2x)}{\sin(3x)}$ en 0
- $g(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ en 0^+
- $h(x) = \sqrt{x^2+3x-1} - x$ en $+\infty$
- $u_n = 1 + \frac{\sin(n^2)}{n^2+1}$ en $+\infty$

2. **(a)** Étudier la continuité de la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(b) Déterminer l'ensemble de définition et de continuité de f dont l'expression est :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? si oui, préciser le prolongement.

Exercice 3.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace de référence indiqué ?

1. $A = \left\{ M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$?

2. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$ sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4.

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.
On dispose d'un second dé cubique B équilibré, présentant deux faces vertes et quatre faces noires.
Le jeu se déroule en deux lancers de dés successifs de la façon suivante : on lance d'abord le dé B, puis
− si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur obtenue ;
− si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur obtenue.

Dans tout l'exercice, on pourra noter V_k (respectivement N_k, R_k) l'événement « le lancer k a donné une face verte (respectivement noire, rouge) ».

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une face noire et une face rouge ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une face noire au deuxième lancer ?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer sachant que le premier lancer a donné une face noire ?

4. On a obtenu une face verte au deuxième lancer, quelle est la probabilité que le premier lancer ait également donné une face verte ?

5. Les événements V_1 et V_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 5.

On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce équilibrée.
On lance le dé et on observe son résultat :
⋆ si celui-ci est un 6, on lance la pièce deux fois ;
⋆ dans tous les autres cas, on lance la pièce une seule fois.
On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de PILES apparus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance $E(X)$ et sa variance $V(X)$, et construire sa fonction de répartition.

2. Calculer $\mathbf{P}(Y = 2)$.

3. **(a)** Montrer que pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathbf{P}_{(X=k)}(Y = 0) = \frac{1}{2}$.

(b) Que vaut $\mathbf{P}_{(X=6)}(Y = 0)$?
En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales, que $\mathbf{P}(Y = 0) = \frac{11}{24}$.

4. Procéder comme en **3.** pour calculer $\mathbf{P}(Y = 1)$.

5. Donner finalement la loi de la variable Y et calculer son espérance.

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^3}{12}-x+1$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Calculer f', déterminer son signe sur $[0,+\infty[$ et donner le tableau des variations complet de f.

2. **(a)** Montrer que f s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $[0,+\infty[$: une première fois sur l'intervalle $[0,2]$ et une deuxième fois sur l'intervalle $]2,+\infty[$.
On notera α la solution de $f(x)=0$ sur $[0,2]$ et β la solution sur $]2;+\infty[$.

(b) Préciser le signe f sur $[0,+\infty[$.

(c) Justifier que $1+\frac{\alpha^3}{12}=\alpha$.
Calculer $f(1)$ et en déduire que $\alpha \geqslant 1$.

3. On cherche à obtenir une approximation de α. À cet effet, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=1+\frac{(u_n)^3}{12}$.

(a) Démontrer que pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[0,\alpha]$.

(b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=f(u_n)$.
Que peut-on dire sur la monotonie de la suite (u_n) ?

(c) En déduire que la suite (u_n) converge.
Montrer que si l'on note ℓ la limite, alors $\ell=1+\frac{\ell^3}{12}$.
En déduire que (u_n) converge vers α.

4. Proposer un algorithme Python qui donnerait également une approximation de α, que l'on souhaite obtenir à 10^{-4} près.

Exercice 7.

On considère le polynôme $P=X^5-1$ de $\mathbb{R}[X]$. Le but de cet exercice est de calculer la valeur exacte du réel $\alpha=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. On pose aussi $\beta=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

1. **(a)** Donner les racines cinquièmes de l'unité, puis décomposer le polynôme P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) En déduire une décomposition de P en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (en fonction de α et β).

2. Effectuer la division euclidienne de X^5-1 par $X-1$. On appellera Q le quotient.

3. Déduire de **1.(b)**, sans aucun calcul, l'écriture factorisée de Q dans $\mathbb{R}[X]$.

4. Développer cette dernière expression et en déduire la valeur des réels $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$.

5. Justifier que α et β sont racines de $X^2+\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}$ et en déduire la valeur exacte de α.