Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 5

Le samedi 14 mars, 8h - 12h.

Calculatrice interdite.

Le sujet comporte 3 pages et 7 exercices.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
La clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

Étudier les limites des suites dont le terme général est donné ci-dessous :

$u_n = \frac{n^3-3}{2(n+1)(3n^2+4)}$ $\qquad v_n = 3 + \frac{\sin(n^2)}{2n-1}$ $\qquad w_n = \frac{(-1)^n \times \sqrt{n}}{2^n+1}$

Exercice 2.

Soit M la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et on note I la matrice identité d'ordre 3.

Partie A.

1. Calculer M^2 puis M^3. M est-elle inversible ? Si oui déterminer son inverse.

2. Calculer $(I-M)(I+M+M^2)$.
On pose $N = I - M$. La matrice N est-elle inversible ? Si oui déterminer son inverse.

3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, exprimer la matrice N^n en fonction de I, M et M^2.
La formule est-elle valable pour $n = 1$, $n = 0$ et $n = -1$?

Partie B.

1. Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à M.

2. Déterminer le noyau et l'image de M.

Exercice 3.

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

2. Étudier les variations de la suite (u_n).

3. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge, on note ℓ sa limite.

4. Montrer que $\ell = \frac{\ell^2+1}{2}$ et en déduire sa valeur.

Exercice 4.

Soient les matrices carrées : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **(a)** Montrer que $A^2 = 3I - 2A$. En déduire que A est inversible et détailler la matrice A^{-1}.

(b) Montrer qu'il existe un réel a tel que $AH = aH$.

(c) Montrer qu'il existe un réel b tel que $A = I + bH$.

On considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} b_0 = 0 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ b_{n+1} = -3b_n + 2 \end{cases}$.

2. **(a)** Sans calculer b_n, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = I + b_n H$.

(b) En déduire $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3b_n + 3 \\ b_n + 3 \end{pmatrix}$.

(c) La suite (x_n) est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = b_n - \frac{1}{2}$. Montrer qu'elle est géométrique. En déduire l'expression du terme général de (b_n).

(d) Exprimer alors la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 3b_n + 3 \\ b_n + 3 \end{pmatrix}$ en fonction de n.

On considère maintenant les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 3 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 6 - 5u_n + 6v_n \text{ et } v_{n+1} = 2 - 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

On note pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

3. **(a)** Montrer que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

(c) Calculer finalement u_n et v_n en fonction de n, et étudier la convergence.

Exercice 5.

On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des points $M(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z = 11$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ est une sphère dont on donnera le centre et le rayon.

2. Montrer que le point $A(1, -3, 7)$ appartient à la sphère $\mathcal{S}$.

3. Déterminer les coordonnées du point A' diamétralement opposé au point A.

4. Donner les équations cartésiennes des plans tangents à $\mathcal{S}$ en A et en A'.

Exercice 6.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(0; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, on considère les points $A(3, 2, 2)$, $C(-1, -1, 0)$ et $D(1, -3, 2)$, le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + 2y + z + 3 = 0$ et la droite Δ définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -6 + 5t \\ z = 0 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Étudier la position relative de la droite Δ par rapport au plan $\mathcal{P}$ (et préciser l'intersection si elle n'est pas vide).

2. Déterminer une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ et en donner deux vecteurs directeurs.

3. **(a)** On note B le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
Déterminer les coordonnées (x_B, y_B, z_B) du point B.

(b) Justifier que le point B appartient à la droite Δ.

4. **(a)** Donner une représentation paramétrique de la droite (CD).

(b) Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de A sur la droite (CD).

(c) Déterminer la valeur exacte de l'aire du parallélogramme $ABCD$.

Exercice 7.

Une boîte contient 3 boules jaunes, 2 boules vertes, et n boules rouges (n est un entier quelconque). Les boules sont indiscernables au toucher, et l'expérience consiste à tirer simultanément deux boules de la boîte.

1. Justifier que $\text{Card}(\Omega) = \frac{(n+5)(n+4)}{2}$.

2. On note A l'événement : « les deux boules sont rouges ».
Exprimer $\mathbf{P}(A)$ en fonction de n.
Décrire $\overline{A}$ par une phrase.

3. Pour quelles valeurs de n est-ce que la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

BONUS :

On considère l'univers $\Omega = \{a, b, c, d\}$ et les trois événements $E = \{a, d\}$, $F = \{a, b, c\}$, $G = \{b, d\}$.
On demande de trouver dans chaque cas, si elle existe, une probabilité sur Ω vérifiant :

1. $\mathbf{P}(E) = 0,5$; $\mathbf{P}(F) = 0,9$ et $\mathbf{P}(G) = 0,4$.

2. $\mathbf{P}(E) = 0,6$; $\mathbf{P}(F) = 0,8$; $\mathbf{P}(G) = 0,7$.

3. $\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}(F) = \mathbf{P}(G)$.