Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 4

Le vendredi 17 janvier, 14h - 18h.

Calculatrice interdite.

Le sujet comporte 3 pages et 7 exercices.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
La notation prendra en compte la présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction (lexique, syntaxe).
La clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 7u_n - 2$.
Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \frac{1}{2}$.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1 + v_n}$.
Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Exercice 2.

1. Résoudre l'équation $z^3 = 27i$.

2. Écrire $-1+i$ sous forme trigonométrique, et en déduire les solutions de l'équation $z^4 = 8\sqrt{2}(-1+i)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 6z + 34 = 0$ et $z^2 + (\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i)z - 1 - \frac{3}{4}i = 0$.

Exercice 3.

Dans le plan, on définit la droite $\mathcal{D}$: $2x + y - 2 = 0$.
Soient A le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec l'axe des abscisses et B le point de coordonnées $(2, 2)$.
Faire une figure est conseillé pour aider à se repérer, mais ne remplace pas une justification ou un calcul.

1. Calculer la distance de B à la droite $\mathcal{D}$.

2. Justifier que A a pour coordonnées $(1, 0)$.

3. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}_1$, perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ et passant par A.

4. Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$, notée $\mathcal{D}_2$.

5. On note Ω le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
Déterminer une équation du cercle de centre Ω et passant par B.
Quelles sont les propriétés géométriques de ce cercle par rapport aux autres points et droites de cet exercice ?

Exercice 4.

Dans le plan euclidien, rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation :

$$x^2+y^2-4x-2y=0$$

1. Déterminer le centre Ω et le rayon R du cercle $\mathcal{C}$.

2. On considère le point A de coordonnées $(3,-2)$ un réel quelconque m.
Déterminer, en fonction de m, une équation de la droite d_m passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

3. Exprimer, en fonction du réel m, la distance δ_m du point Ω à la droite d_m.

4. En déduire qu'il existe deux valeurs de m pour lesquelles d_m est tangente au cercle $\mathcal{C}$.
Donner les équations de ces deux droites.

Exercice 5.

1. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 8\\ 4x-2y+z & = & 1\\ 16x-4y+z & = & 3\end{array}\right.$.

2. En déduire qu'il existe un unique polynôme de degré 2, noté P tel que $P(-4)=3$, $P(-1)=8$ et $P(-2)=1$, et préciser l'expression donnant $P(x)$.

Exercice 6.

On étudie selon les valeurs de α, l'équation différentielle suivante, avec deux conditions initiales :

$$y''+\alpha y=0 \quad \text{sur} \quad [0,L], \quad y(0)=y(L)=0$$

L est un paramètre strictement positif, et on cherche les solutions parmi les fonctions à valeurs réelles.

1. Résoudre ce problème lorsque $\alpha=0$.

2. Résoudre ce problème lorsque $\alpha<0$.

3. **(a)** Lorsque $\alpha>0$, montrer que ce problème a une solution non nulle si et seulement si $\alpha=n^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

(b) Dans ce cas, ce problème modélise la vibration d'une corde de longueur L, bloquée à ses extrémités, avec $\alpha=\frac{\omega^2}{c^2}$ où ω représente la pulsation de l'oscillation et c la célérité.
On rappelle que la fréquence f est liée à la pulsation ω par la relation $f=\frac{\omega}{2\pi}$, et pour notre corde, on a $c=440m.s^{-1}$.
La note « La » est une vibration à 440Hz.
Déterminer la longueur de la corde pour qu'elle donne un « La » en vibrant avec $n=1$.

Exercice 7.

On donne les valeurs approchées suivantes : $\ln(2) \approx 0{,}7$; $\ln(3) \approx 1{,}1$; $\ln(10) \approx 2{,}3$.

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs.
La taille de la population au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1) \quad y' = \frac{y}{4}.$$

(a) La population est formée de 100 rongeurs à la date $t = 0$.
Résoudre l'équation différentielle (E_1) et déterminer l'expression de $g(t)$ pour $t \geqslant 0$.

(b) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?
On donnera la valeur exacte simplifiée, puis on calculera une valeur approchée à l'aide des valeurs données au début de l'énoncé.

2. En réalité, dans le secteur observé, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de centaines de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(\mathrm{E}_2) \begin{cases} u'(t) - \dfrac{u(t)}{4} + \dfrac{\big(u(t)\big)^2}{12} = 0 & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul} \\ u(0) = 1 \end{cases}.$$

(a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$.
On considère, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$.
Démontrer que la fonction u est solution de (E_2) si et seulement si la fonction h est solution de (E_3) avec :

$$(\mathrm{E}_3) \begin{cases} h'(t) + \dfrac{1}{4}h(t) - \dfrac{1}{12} = 0 & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) = 1. \end{cases}.$$

(b) Résoudre (E_3) et en déduire l'expression de la fonction u.

(c) Étudier les variations et la limite de u en $+\infty$ et interpréter l'évolution de la population de rongeurs dans ce modèle.