Correction du Devoir Surveillé n° 3

Exercice 1.

❀❀ **1.** $S_1 = 2\sum_{k=0}^{17} k + \sum_{k=0}^{17} 7$

✍ $= 2 \times \ldots - 7 \times \ldots$

$= \ldots$

$= \underline{180}$

de 0 à 17 il y a 17+1 nombres entiers !

$$S_2 = \sum_{p=3}^{12} \frac{1}{2^p} + \sum_{p=3}^{12} p = \sum_{p=3}^{12} \left(\frac{1}{2}\right)^p + \sum_{p=3}^{12} p$$

✍ *Il reste à appliquer 2 formules !*

$\boxed{S_2 = \frac{1023}{4096} + 75}$

❀ **2.** **(a)** $\frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{k+1-(k-1)}{2(k-1)(k+1)} = \frac{2}{2(k^2-1)} = \frac{1}{k^2-1}$, donc $\boxed{\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{k^2-1}}$.

(b) Pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}\right)$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - \sum_{\ell=3}^{n+1} \frac{1}{\ell}\right)$ avec $p = k-1$: k va de 2 à n, p va de 1 à $n-1$; et $\ell = k+1$: k va de 2 à n, ℓ va de 3 à $n+1$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{p=3}^{n-1} \frac{1}{p} - \sum_{\ell=3}^{n-1} \frac{1}{\ell} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n^2+n}\right)}$$

✍ **3.** ❀❀ **(a)** *formule à retrouver dans le cours*

$\boxed{A(x) = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 132x + 64}$

✍ **(b)** *formule du cours*

ne pas aller trop vite dans les calculs de puissances de $(2i)$ *!*

on trouve : $\boxed{(1-2i)^5 = 41 + 38i}$

$$\sum_{k=0}^{4} (1-2i)^k = \frac{1-(1-2i)^5}{1-(1-2i)} = \frac{1-(41+38i)}{2i} = \frac{(-40-38i)\times(-i)}{2} = \boxed{-19+20i}$$

❀❀ **4.** **(a)** $\tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + k\pi$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

Ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$, et $\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}}$.

(b) $\cos(3x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $3x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

✍ $\iff \ldots$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{-5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$

Ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

Et $\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{36}; \frac{25\pi}{36}; \frac{49\pi}{36}; \frac{19\pi}{36}; \frac{43\pi}{36}; \frac{67\pi}{36}\right\}}$.

(c) $\sin(x) - \sin(3x) = 0 \iff \sin(x) = \sin(3x)$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = 3x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - 3x + 2k\pi$$

✍ $$\iff \dots$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = -k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{-k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$ et $\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{0; \pi; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}}$.

✍ **5❀❀(a)** $|2x+3| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant 2x+3 \leqslant 1 \iff \dots$

$\boxed{\mathcal{S} = [-2; 1]}$.

(b) $|-x+1| = \begin{cases} -(-x+1) & \text{si } -x+1 \leqslant 0 \\ -x+1 & \text{si } -x+1 > 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $|-x+1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x > 1 \\ -x+1 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$

✍ De même, $|2x-6| = \begin{cases} \dots\dots\dots\dots \text{si } x \leqslant \dots \\ \dots\dots\dots\dots \text{si } x > \dots \end{cases}$

Donc :

x		1		3	
$\lvert -x+1\rvert$		|		|	
$\lvert 2x+6\rvert$		|		|	
✍ $\lvert -x+1\rvert + \lvert 2x+6\rvert = 3 \iff$					

vérifier que les solutions éventuellement trouvées dans chaque cas sont bien dans l'intervalle considéré.

Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{2; \frac{10}{3}\right\}}$.

Exercice 2.

1. L'ensemble de définition de g est centré en 0.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) &= -x + 2 - 2\ln(e^{-x}+1) \\
&= -x + 2 - 2\ln\Big(e^{-x}(1+e^{x})\Big) \\
&= -x + 2 - 2\ln(e^{-x}) - 2\ln(1+e^{x}) \\
&= -x + 2 - 2 \times (-x) - 2\ln(e^{x}+1) \\
&= x + 2 - 2\ln(e^{x}+1) \\
&= g(x) \qquad \text{donc } \boxed{g \text{ est paire}}.
\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 1 = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x+1) = \lim\limits_{X\to1} \ln(X) = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 2 = -\infty$, donc par différence, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$.

Par parité, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$.

❀ **3.** $g'(x) = 1 + 0 - 2\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-2e^x}{e^x+1} = \boxed{\frac{1-e^x}{e^x+1}}$.

$1 - e^x > 0 \iff 1 > e^x \iff 0 > x$ (car la fonction ln est strictement croissante)

Et pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $e^x + 1 > 0$. D'où le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$1-e^x$		$+$	0	$-$	
e^x+1		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2-2\ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$

avec
$$\begin{aligned}
g(0) &= 0 + 2 - 2\ln(e^0+1) \\
&= 2 - 2\ln(1+1) \\
&= 2 - 2\ln(2)
\end{aligned}$$

4. $g|_{[0;+\infty[}$ est strictement décroissante, donc c'est une bijection.
D'après le tableau des variations, sa réciproque h sera définie sur $]-\infty, 2-2\ln(2)]$.
Et elle sera strictement décroissante (comme g).

5.
$$\begin{aligned} g(x) = x &\iff 2 - 2\ln(e^x+1) = 0 \\ &\iff \ln(e^x+1) = 1 \\ &\iff e^x + 1 = e \quad \text{par application de la fonction exp} \\ &\iff e^x = e - 1 \\ &\iff x = \ln(e-1) \quad \text{par application de la fonction ln} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La solution de l'équation est donc } \ln(e-1).}$

Exercice 3.

❀❀ **1.** Cette expression est un polynôme de degré 2 avec $a = 1$, $b = -e$ et $c = e$.
$\Delta = (-e)^2 - 4 \times 1 \times e = e^2 - 4e = e(e-4) < 0$ car $0 < e < 3$.
Donc le polynôme n'a pas de racine, et $a > 0$ donc $\boxed{\text{pour tout } x,\ x^2 - x.e + e > 0}$.

2❀❀**(a)**
$$\begin{aligned} f(0) &= 1 - \ln(0^2 - 0 \times e + e) \\ &= 1 - \ln(e) \\ &= \underline{0} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(1) &= 1 - \ln(1^2 - 1 \times e + e) \\ &= 1 - \ln(1) \\ &= \underline{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(e-1) &= 1 - \ln\Big((e-1)^2 - (e-1)e + e\Big) \\ &= 1 - \ln(e^2 - 2e + 1 - e^2 + e + e) \\ &= 1 - \ln(1) \\ &= \underline{1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(e) &= 1 - \ln(e^2 - e \times e + e) \\ &= 1 - \ln(e) \\ &= \underline{0} \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{e}{2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{e^2}{2^2} - \frac{e^2}{2} + e\right) = 1 - \ln\left(e(\frac{e}{4} - \frac{e}{2} + 1)\right) = 1 - \ln(e) - \ln(1 - \frac{e}{4}) = \boxed{-\ln\left(1 - \frac{e}{4}\right)}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - xe + e = +\infty$ (polynôme du second degré)

donc par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to+\infty} 1 - \ln(u) = \boxed{-\infty}$

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x.e + e = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

(b) On utilise la formule $(1 - \ln(u))' = -\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 - x.e + e$ donc $u'(x) = 2x - e$.
On obtient alors $\boxed{f'(x) = -\dfrac{2x - e}{x^2 - x.e + e}}$.

x	$-\infty$		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
-1		$-$		$-$	
$2x - e$		$-$	0	$+$	
$x^2 - x.e + e$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

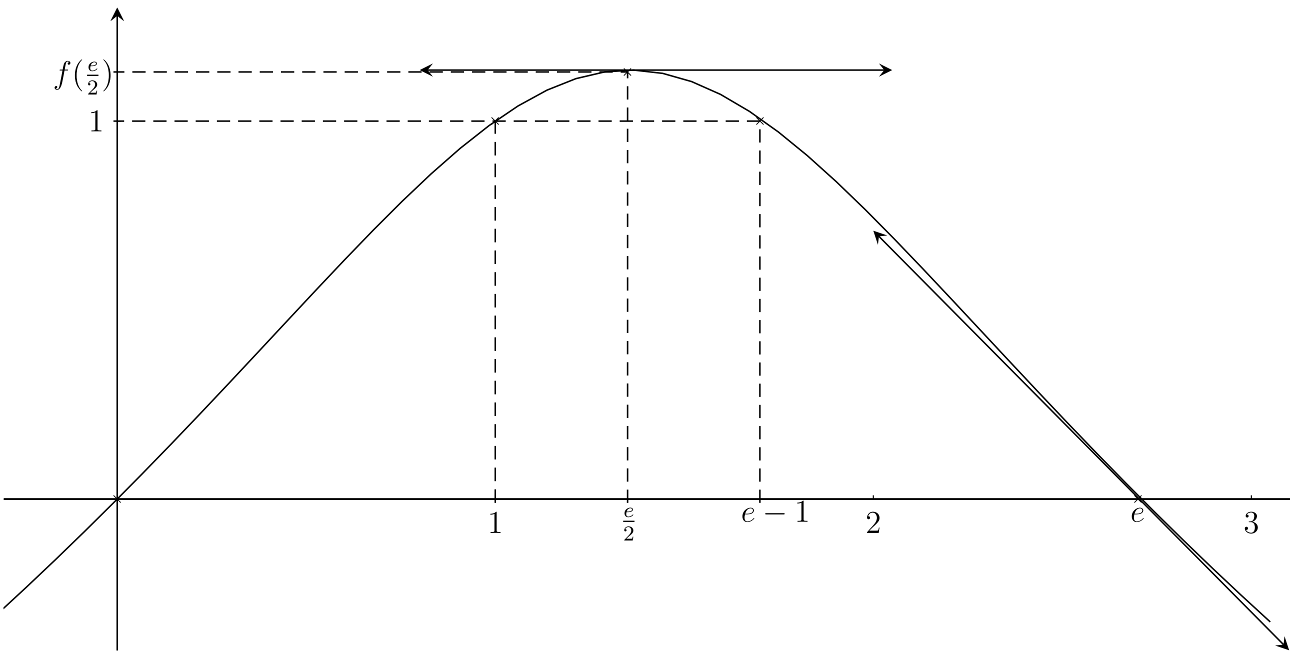
d'après **1.**

(c)

x	$-\infty$		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\ln(1 - \frac{e}{4})$	$\searrow$	$-\infty$

3. En $\frac{e}{2}$, la courbe a un maximum donc la tangente a pour équation $\boxed{y = -\ln(1 - \frac{e}{4})}$.
En e : $f'(e) = -\dfrac{2e - e}{e^2 - e.e + e} = -\dfrac{e}{e} = -1$ donc $y = -1(x - e) + 0$ soit $\boxed{y = -x + e}$.

4.



Exercice 4.

❀❀ **1.** f est la composée d'une fraction rationnelle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par la fonction arctangente, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}\backslash\{-1\}}$.

❀ **2.**
- en $-\infty$: $\frac{1-x}{1+x} = \frac{x(\frac{1}{x}-1)}{x(\frac{1}{x}+1)} = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}$

  Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x}{1+x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = -1$

  Donc par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to-1} \arctan(X) = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$
- en $+\infty$: de même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x}{1+x} = -1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{4}}$.
- $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \arctan(0) = 0}$

❀❀
- en -1 : $\star \lim\limits_{x\to-1} 1-x = 2$

  $\star \lim\limits_{x\to-1} 1+x = 0$ et $1+x>0$ pour $x>-1$

  $1+x<0$ pour $x<-1$

  $\star$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1-x}{1+x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{1-x}{1+x} = -\infty$

  Donc par composition, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \arctan(X) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

  et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} \arctan(X) = \boxed{-\frac{\pi}{2}}$.

3. On utilise $(\arctan(u))' = u' \times \frac{1}{1+u^2}$.
Alors pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{-1(1+x)-(1-x)1}{(1+x)^2} \times \dfrac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} = -2\times\dfrac{1}{(1+x)^2+(1-x)^2}$.

La fraction est à valeurs positives donc la dérivée est strictement négative.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$ ‖ $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{4}$

❀❀ Exercice 5.

Partie A.

1. Emballer les 10 cadeaux revient à choisir 10 fois une couleur d'emballage, dans l'ordre des cadeaux. Une couleur peut être utilisée pour plusieurs cadeaux.
Déterminer les couleurs des paquets revient donc à former une 10-liste d'éléments de l'ensemble {rouge, vert, blanc, jaune}.
Cela fait donc $\boxed{4^{10} \text{ choix possibles}}$.

2. Emballer les cadeaux sans utiliser le papier rouge se fait de 3^{10} façons différentes.
Donc $\boxed{\text{il y a } 4^{10} - 3^{10} \text{ résultats possibles avec au moins un cadeau emballé en rouge}}$.

Partie B.

1. Le père Noël peut constituer son attelage en plaçant l'un après l'autre huit rennes aux différentes places de l'attelage.
Il forme ainsi une 8-liste de rennes distincts de l'ensemble des dix-sept de sa harde.
$\boxed{\text{Il y a donc } \frac{17!}{(17-8)!} \text{ équipes possibles, soit } 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10.}$

2. Si Rudolphe est en tête, il reste à sélectionner les 7 autres rennes pour compléter l'attelage, parmi les 16 rennes restant, dans les mêmes conditions que précédemment.
Cela fait donc $\boxed{\frac{16!}{(16-7)!} \text{ ou } 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \text{ attelages possibles avec Rudolphe en tête}}$.

Partie C.

1. Il s'agit ici de sélectionner simultanément 4 rennes parmi les 9. On forme donc une partie de 4 rennes parmi les 9.
On a donc $\binom{9}{4}$ choix possibles.
$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} = 9 \times 7 \times 2$.
$\boxed{\text{Le nombre d'équipes possible est } 9 \times 7 \times 2.}$

2. Pour former une équipe sans Rudolphe, on choisit 4 rennes parmi les 8 autres, cela fait $\binom{8}{4}$ possibilités.
$\binom{8}{4} = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 7 \times 2 \times 5$.
En admettant que tous les choix d'équipes sont équiprobables, la probabilité que Rudolphe puisse se reposer est $\frac{7\times2\times5}{9\times7\times3}$ soit $\boxed{\frac{5}{9}}$.

Exercice 6. Indications.

1. **(b)** *pas de calculs attendus, juste l'expression de la forme algébrique*

2. **(a)** $P_n = \ldots = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i\left(\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^k = \ldots$

(b) $C_n = \mathrm{Re}\,(P_n)$

(c) $S_n = \mathrm{Im}\,(P_n)$