Devoir Surveillé n° 3

Le vendredi 29 novembre, 14h - 18h.

Calculatrice interdite.

Le sujet comporte 3 pages et 6 exercices.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
La notation prendra en compte la présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction (lexique, syntaxe).
La clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1. Calculs.

1. Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{17}(2k-7)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{p=3}^{12}\left(\frac{1}{2^p}+p\right)$.

2. **(a)** Montrer que pour tout $k \in [\![2,+\infty[\![$, $\dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{1}{2(k-1)} - \dfrac{1}{2(k+1)}$

(b) Pour $n \geqslant 2$, calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$.

3. **(a)** En utilisant la formule du binôme de Newton, développer l'expression $A(x) = (x+2)^6$.

(b) Développer en utilisant la formule du binôme de Newton : $(1-2i)^5$.

En déduire la forme algébrique de $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}(1-2i)^k$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, et donner ensuite les solutions sur $[0, 2\pi[$:
(a) $\tan(x) = \sqrt{3}$ **(b)** $\cos(3x+\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **(c)** $\sin(x) - \sin(3x) = 0$.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$: **(a)** $|2x+3| \leqslant 1$ **(b)** $|-x+1| + |2x-6| = 3$.

Exercice 2.

Soit $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+2-2\ln(e^x+1) \end{array}$.

1. Étudier la parité ou imparité de g.

2. Calculer la limite de g en $-\infty$, puis en $+\infty$.

3. Construire le tableau des variations complet de g.

4. Justifier que $g|_{[0,+\infty[}$ est une bijection.
On note h sa réciproque, préciser son ensemble de définition et ses variations.

5. Résoudre l'équation $g(x) = x$.

Exercice 3.

Dans tous les calculs et expressions, la lettre « e » désigne le nombre $\exp(1)$, *et on donne* $e \approx 2,71$.

1. Montrer que pour tout réel x, $x^2 - x \times e + e > 0$.

On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \ln(x^2 - x \times e + e)$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

2. **(a)** Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(e-1)$ et $f(e)$. Vérifier que $f\left(\frac{e}{2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{e}{4}\right)$.
Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) Calculer $f'(x)$, puis étudier son signe.

(c) Construire le tableau des variations de f.

(d) Déterminer une équation des tangentes à la courbe de f en $x = \frac{e}{2}$ et en $x = e$.

3. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 5cm, en faisant figurer les résultats obtenus aux questions précédentes.
(On donne $f\left(\frac{e}{2}\right) \approx 1,1$).

Exercice 4.

On définit $f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, 1 et -1.

3. Construire le tableau des variations de f.

Bonus. Donner une expression simplifiée de f.

Exercice 5.

Les trois parties sont indépendantes les unes des autres.
On rappelle que tous les résultats doivent être justifiés, en utilisant le vocabulaire adapté.
Les résultats peuvent être laissés sous forme de produits d'entiers ou de fractions simplifiées.

Partie A.

Un lutin est chargé d'emballer dans l'ordre 10 cadeaux, numérotés de 1 à 10, pour aider le père Noël. Il a à sa disposition, et à volonté, du papier cadeau rouge, du vert, du blanc et du jaune. Pour chaque cadeau, le lutin choisit au hasard entre ces couleurs.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles pour l'emballage des huit cadeaux ?

2. Combien y a-t-il de résultats pour lesquels au moins un cadeau est rouge ?

Partie B.

Le père Noël a une harde de 17 rennes. Mais son attelage ne comporte que 8 places, et elles sont toutes différentes.

1. De combien de façons possible le père Noël peut-il constituer son attelage ?

2. Rudolphe est l'un des 17 rennes.
Combien d'attelages de huit rennes peut-on former avec Rudolphe en tête ?

Partie C.
Pendant la tournée du père Noël, 9 rennes restent seuls. Chaque jour, il faut en sélectionner 4 pour participer à l'entretien de la maison.

1. Combien d'équipes de 4 rennes peut-on former ?

2. Rudolphe fait partie des rennes restés à la maison.
Combien d'équipes de 4 rennes peut-on former sans Rudolphe ?
En considérant que le choix des 4 rennes soit effectué au hasard, quelle est la probabilité que Rudolphe puisse se reposer ?

Exercice 6.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.
On cherche à calculer les deux sommes $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Calculs préliminaires :

(a) Montrer que $1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

(b) Pour k dans $[\![0, n]\!]$, donner l'écriture algébrique de $e^{i(\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}$.

2. Calcul des sommes S_n et C_n.
On note $P_n = C_n + iS_n$.

(a) Montrer que $P_n = e^{i\frac{\pi}{4}} \times (\sqrt{3})^n \times e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

(b) En déduire que $C_n = \frac{\sqrt{2}\times(\sqrt{3})^n}{2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)$ et donner une expression de S_n.

Bonus : calcul du quotient $Q_n = \frac{S_n}{C_n}$.

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n \neq 0$.

(b) Montrer alors que $Q_n = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{6}\right)$.