Correction de l'exercice 4 du DS n° 2

Exercice 4.

1. f est une fraction rationnelle donc elle est définie et dérivable partout où son dénominateur ne s'annule pas.
Or pour le dénominateur, $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 1 = -4 < 0$ donc il ne s'annule jamais.
Donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$.
Et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{4(2x^2+2x+1)-(4x+2)(4x+2)}{(2x^2+2x+1)^2} = \frac{8x^2+8x+4-(16x^2+16x+4)}{(2x^2+2x+1)^2} = \frac{-8x^2-8x}{(2x^2+2x+1)^2} = \boxed{\frac{-8x(x+1)}{(2x^2+2x+1)^2}}$.

2.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-8x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$f(x) = \frac{x(4+\frac{2}{x})}{x^2(2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{4+\frac{2}{x}}{x(2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 4+\dfrac{2}{x} = 4$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x(2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}) = -\infty$
donc par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$f(0) = \frac{2}{1} = 2$ et $f(-1) = \frac{-2}{2-2+1} = -2$

3. La courbe de f croise l'axe des ordonnées en $f(0)$ et l'axe des abscisses en x qui vérifie $f(x) = 0$.
Or $f(x) = 0 \iff 4x + 2 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$.
Donc $\boxed{\text{la courbe de } f \text{ croise l'axe des ordonnées en } (0, 2) \text{ et l'axe des abscisses en } (-\frac{1}{2}, 0)}$.

4. Le dénominateur de f est toujours strictement positif car c'est un polynôme du 2nd degré qui ne s'annule pas et dont le coefficient de x^2 est positif.
Donc $f(x) \geqslant 0 \iff 4x + 2 \geqslant 0$ soit $x \geqslant -\frac{1}{2}$.
Donc $\boxed{\mathcal{S} = [-\frac{1}{2}, +\infty[}$.