Correction du Devoir Surveillé n° 2

Lundi 18/11, interrogation sur quelques unes des questions marquées ❀❀.

❀❀ Exercice 1.

✍ *Tout corriger en utilisant le cours si besoin. Puis s'assurer que tout est su !*

5. *si on écrit $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}^*, f(x+T) = f(x)$, alors le T peut dépendre du x et s'adapter selon la valeur de x, autrement dit cela ne fait pas une période !*
Il faut donc que l'existence du T soit donnée <u>avant</u> de parler de x :
$\exists T \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$.

7. $\boxed{f \text{ est paire}}$ ✍

g n'est ni paire ni impaire à prouver avec une <u>valeur</u> de x :
$g(\frac{\pi}{3}) = \sin(\pi) = 0$
$g(-\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
$g(\frac{\pi}{3}) \neq g(-\frac{\pi}{3})$ donc $\boxed{g \text{ n'est pas paire}}$.
$-g(\frac{\pi}{3}) \neq g(-\frac{\pi}{3})$ donc $\boxed{g \text{ n'est pas impaire}}$.

en fait $h(x) = -\sin(x)$ donc h est impaire ✍

Exercice 2.

❀❀ **1.** ✍ *dériver les réponses fausses pour comprendre le problème, et dériver les réponses justes pour comprendre pourquoi ça marche !*
$\boxed{F(x) = -\frac{3}{4(2x-1)^2}}$ et $\boxed{G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-2}}$ et $\boxed{H(x) = \frac{1}{3}\ln(|x|)}$.

ne pas oublier la valeur absolue dans le $\ln$ pour que la primitive soit définie sur $\mathbb{R}^*$

2. La fonction F définie par $F(x) = x(a\ln(x) + b)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Alors, $F'(x) = a\ln(x) + b + x(a\frac{1}{x}) = a\ln(x) + a + b$.
En identifiant, on constate que pour $a = 2$ et $a + b = 3$, $F' = f$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour } a = 2 \text{ et } b = 1, \text{ la fonction } F \text{ est bien une primitive de } f \text{ sur }]0, +\infty[}$.

Exercice 3.

1. *f est injective mais non surjective !*
❀❀ *injectivité : phrases habituelles* ✍
non surjectivité : on peut montrer que 0 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{Z}$.

Attention : *lorsque l'on trouve un antécédent potentiel, bien vérifier qu'il est dans l'ensemble de définition !*

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}.$$

Cette application est compliquée, on peut calculer $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$ ... pour mieux comprendre comment elle fonctionne.

• Montrons que g est injective.

Soient n et n' dans $\mathbb{N}$ tels que $g(n) = g(n')$.
Alors en particulier, $g(n)$ et $g(n')$ sont de même signe, on peut donc distinguer deux cas :

⋆ 1er cas : $g(n)$ et $g(n')$ sont positifs : alors c'est que n et n' sont pairs et $g(n) = \frac{n}{2}$ et $g(n') = \frac{n'}{2}$ donc $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$ donc $n = n'$.
⋆ 2ème cas : $g(n)$ et $g(n')$ sont strictement négatifs : alors cela veut dire que n et n' sont impairs et $g(n) = -\frac{n+1}{2}$ et $g(n') = -\frac{n'+1}{2}$ donc $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$ donc $n+1 = n'+1$ donc $n = n'$.
Dans tous les cas, si $g(n) = g(n')$, alors $n = n'$. Donc $\boxed{g \text{ est injective}}$.

• Montrons que g est surjective.
Soit y dans $\mathbb{Z}$, on cherche n dans $\mathbb{Z}$ tel que $g(n) = y$.
⋆ 1er cas : $y \geqslant 0$, alors on résout $\frac{n}{2} = y$, on obtient $n = 2y$.
Ainsi, avec $n = 2y$, n est un entier naturel pair donc $g(n) = \frac{n}{2} = \frac{2y}{2} = y$ donc n est un antécédent de y.
⋆ 2ème cas : $y < 0$, alors on résout $-\frac{n+1}{2} = y$, on obtient $n+1 = -2y$ donc $n = -2y-1$.
Puisque y est un entier strictement négatif, y est inférieur ou égal à -1 donc $-2y \geqslant 2$ donc $-2y-1 \geqslant 1$.
Ainsi, en posant $n = -2y-1$: n est un entier naturel impair, donc $g(n) = -\frac{n+1}{2} = -\frac{-2y}{2} = y$.
Dans tous les cas, y a un antécédent dans $\mathbb{N}$.
Donc $\boxed{g \text{ est surjective}}$.
Ainsi, $\boxed{g \text{ est bijective}}$, et $\boxed{\begin{array}{rcl} g^{-1} : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ y & \mapsto & \begin{cases} 2y \text{ si } y \geqslant 0 \\ -2y-1 \text{ si } y < 0 \end{cases} \end{array}}$.

2. On définit $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{1+ix}{1-ix} \end{array}$.

(a) $x \in h^{-1}(\mathbb{R}) \iff h(x) \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(h(x)) = 0$.
Or $h(x) = \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{(1+ix)^2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + i\frac{2x}{1+x^2}$.
Donc $\operatorname{Im}(h(x)) = 0 \iff 2x = 0 \iff x = 0$.
On a donc bien $\boxed{h^{-1}(\mathbb{R}) = \{0\}}$.

(b) • Montrons que $h(\mathbb{R}) \subset \mathbb{U}\backslash\{-1\}$: soit $y \in h(\mathbb{R})$, montrons que $y \in \mathbb{U}\backslash\{-1\}$.
$y \in h(\mathbb{R})$ donc il existe un réel x tel que $h(x) = y$.
⋆ $|h(x)| = \frac{|1+ix|}{|1-ix|} = \frac{1+x^2}{1+(-x)^2} = 1$ donc $y \in \mathbb{U}$.
⋆ $y = -1 \iff \frac{1+ix}{1-ix} = -1 \iff 1+ix = -(1-ix) \iff 1+ix = -1+ix \iff 1 = -1$ ce qui est faux.
Donc $y \neq -1$.
⋆ Donc $y \in \mathbb{U}\backslash\{-1\}$.
Nous venons donc de démontrer que $h(\mathbb{R}) \subset \mathbb{U}\backslash\{-1\}$.
• Montrons que $\mathbb{U}\backslash\{-1\} \subset h(\mathbb{R})$: soit $y \in \mathbb{U}\backslash\{-1\}$, on cherche un réel x tel que $y = h(x)$.

$$\begin{aligned} y = h(x) &\iff y = \frac{1+ix}{1-ix} \\ &\iff y(1-ix) = 1+ix \\ &\iff y - yix = 1+ix \\ &\iff y-1 = x(i+iy) \\ &\iff \frac{y-1}{i(1+y)} = x \quad \text{car } y \neq -1 \end{aligned}$$

Montrons que x ainsi défini est un nombre réel :
$x = -i\frac{y-1}{1+y} = -i\frac{(y-1)(1+\overline{y})}{(1+y)(1+\overline{y})} = -i\frac{y+|y|^2-1-\overline{y}}{|1+y|^2} = -i\frac{2i\operatorname{Im}(y)+1^2-1}{|1+y|^2} = \frac{2\operatorname{Im}(y)}{|1+y|^2} \in \mathbb{R}$
Finalement, on a prouvé que $y \in h(\mathbb{R})$.
Donc $\boxed{h(\mathbb{R}) = \mathbb{U}\backslash\{-1\}}$.

❀❀ Exercice 4.

1. *f est une <u>fraction rationnelle</u>*
2.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$-8x$	
$x+1$	
$f'(x)$	
$f(x)$	

3. *la courbe de f croise l'axe des ordonnées en $f(0)$ et l'axe des abscisses en x qui vérifie $f(x)=0$*
4. *utiliser le tableau des variations où l'on a rajouté la valeur $f(-\frac{1}{2})=0$ OU faire un tableau de signe de f*

Exercice 5.

Attention : *Le théorème des croissances comparées s'applique à un <u>produit</u> ou un <u>quotient</u> <u>indéterminé</u> et <u>doit être cité</u> !*

❀❀ **1.** **(a)** $\star$ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ par le théorème des croissances comparées, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1}$.

$\star$ $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ (produit) donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

❀❀ **(b)** g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme et produit de fonctions usuelles dérivables).
Et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$.
De plus, pour tout x, e^x est strictement positif donc $g'(x)$ est du même signe que $1+x$.
Donc :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{1}{e}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

(c) g est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$ donc d'après le tableau des variations, $\boxed{g \text{ est une bijection de } [-1,+\infty[\text{ dans } [-e^{-1}-1,+\infty[}$.
$0 \in [-e^{-1}-1,+\infty[$ (car $-e^{-1}-1<0$) donc 0 a un unique antécédent par g dans $[-1,+\infty[$, autrement dit $\boxed{\text{l'équation } g(x)=0 \text{ a une unique solution sur } [-1,+\infty[}$.
$g(0) = -1$ donc $g(0) < g(\alpha)$.
Or g est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$ donc $\boxed{0<\alpha}$.

❀❀ **2.** **(a)** $\star$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$ (différence de limites usuelles)

$\star$ $f(x) = e^x\left(1 - \frac{\ln(x)}{e^x}\right)$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- par le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln(x)}{e^x} = 1$

Donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

(b) f est dérivable (différence de fonctions usuelles dérivables).

Et pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x-1}{x} = \boxed{\frac{g(x)}{x}}$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. Or g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et s'annule en α, elle est donc négative pour $x \in]0,\alpha[$ et positive sur $]\alpha,+\infty[$.

(c) α est la solution de $g(x) = 0$ sur $]-1,+\infty[$ donc $g(\alpha) = 0$ soit $\alpha e^\alpha - 1 = 0$ donc $\boxed{e^\alpha = \frac{1}{\alpha}}$.

Alors, $f(\alpha) = e^\alpha - \ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \ln(\frac{1}{e^\alpha}) = \frac{1}{\alpha} + \ln(e^\alpha) = \boxed{\frac{1}{\alpha} + \alpha}$

3. $\alpha \approx 0,5$ *donc* $f(\alpha) \approx \frac{1}{0,5} + 0,5 = 2,5$

Exercice 6.

❀❀ **1.** f et g sont des fractions rationnelles, leur dénominateur est $1 - x^2$.
Or $1 - x^2 = 0 \iff x = -1$ ou $x = 1$.
Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}}$.

❀❀ **2.** $f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}^2}{1-\sqrt{3}^2} = \frac{3}{1-3} = \boxed{-\frac{3}{2}}$ et $g\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}^3}{1-\sqrt{3}^2} = \boxed{-\frac{3}{2}\sqrt{3}}$.

❀❀ **3.** $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ sont symétriques par rapport à 0 (les « valeurs interdites » sont opposées).
Donc $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = \frac{(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{x^2}{1-x^2} = f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est paire}}$.
$\forall x \in \mathcal{D}_g$, $-x \in \mathcal{D}_g$ et $g(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = \frac{-x^3}{1-x^2} = -g(x)$ donc $\boxed{g \text{ est impaire}}$.

❀❀ **4.** $f(x) = \frac{x^2}{x^2(\frac{1}{x^2}-1)} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} - 1 = -1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1}$.
De même, $g(x) = \frac{x}{\frac{1}{x^2}-1}$ donc par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$.

❀❀ En 1 : *limites de type* « $\frac{\ell}{0}$ » *avec* $\ell \neq 0$ *: le résultat est un infini, il faut étudier le signe pour savoir si c'est* $+\infty$ *ou* $-\infty$.

⋆ $\lim\limits_{x\to 1} 1 - x^2 = 0$, or

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

.

donc par inverse, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{1-x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-x^2} = +\infty$.

⋆ De plus, $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$.

⋆ Donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty}$

⋆ De même, $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -\infty}$.

Par parité, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty}$.

Par imparité, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = -\infty}$.

Les droites d'équations $x = 1$ et $x = -1$ sont asymptotes à la courbe de f et à celle de g.
Et la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

❀❀ **5.** f et g sont des fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, donc elles sont dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.
On va utiliser la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Alors pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, $f'(x) = \dfrac{2x(1-x^2)-x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \boxed{\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}}$

$g'(x) = \dfrac{3x^2(1-x^2)-x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{3x^2-3x^4+2x^4}{(1-x^2)^2} = \dfrac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2} = \boxed{\dfrac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}}$.

6.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-x^2)^2$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-1

avec $f(0) = \frac{0^2}{1-0^2} = 0$.

Pour g, x^2 et $(1-x^2)^2$ sont toujours positifs, donc $g(x)$ est du signe de $3-x^2$, donc :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$3-x^2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

7.
- pour f, équation de la tangente $y = f'(\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) + f(\sqrt{3})$.
  $f'(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3}^2)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc la tangente à la courbe de f en $\sqrt{3}$ a pour équation $y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-\sqrt{3}) - \frac{3}{2}$ soit $\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 3}$.
- pour g : $g'(\sqrt{3}) = 0$ donc la tangente a pour équation $\boxed{y = -\frac{3\sqrt{3}}{2}}$.

8.