Nom - Prénom :

Devoir Surveillé n^{o} 2

Le vendredi 8 novembre, 14h - 18h.

Calculatrice interdite.

Le sujet comporte 4 pages et 6 exercices.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
La notation prendra en compte la présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction (lexique, syntaxe).
La clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1. Questions de cours ou application directe.

1. Simplifier l'écriture des expressions suivantes (on considère que $n \geqslant 3$) :

$\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\dfrac{(n+1)(n-1)!}{(n+1)!} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(n^2+n)n!(n-1)! = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Compléter les formules de sommes suivantes :

$\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{k=0}^{n} k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad .$

3. Écrire en français la phrase mathématique suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2 = 385.$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4. f et g étant deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, traduire par des quantificateurs :

(a) 17 est un minorant de f.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(b) f n'est pas la fonction nulle.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(c) L'équation $f(x) = 4$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5. Définition d'une fonction périodique : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

6. Énoncer le théorème des gendarmes :

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Déterminer $\lim_{x \to 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$:

7. Étudier la parité ou imparité des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:
$f(x) = x\sin(x)$ et $g(x) = \sin(x + \frac{2\pi}{3})$ et $h(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$.

Exercice 2.

1. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :
$f(x) = \frac{3}{(2x-1)^3}$ sur $I = \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$; $g(x) = xe^{x^2-2}$ sur $I = \mathbb{R}$; $h(x) = \frac{1}{3x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) + 3$.
Déterminer deux réels a et b tels que la fonction F, définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = x(a\ln(x) + b)$ soit une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

Exercice 3.

1. Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est injective ? surjective ? bijective ? En cas de bijectivité, préciser sa réciproque.

$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 3n+2 \end{array}$ $\qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{array} \right. \end{array}$.

2. *On rappelle que* $\mathbb{U}$ *est l'ensemble des nombres complexes de module 1, et que* $|z|^2 = z\bar{z}$.

On définit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{1+ix}{1-ix} \end{array}$.

(a) Montrer que $h^{-1}(\mathbb{R}) = \{0\}$.

(b) Montrer que $h(\mathbb{R}) = \mathbb{U}\backslash\{-1\}$ (*on pourra procéder par double inclusion*).

Exercice 4.

Soit f la fonction dont l'expression est $f(x) = \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-8x(x+1)}{(2x^2+2x+1)^2}$.

2. Construire le tableau des variations de f avec les limites et les extrema éventuels.

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe de f avec les axes du repère.

4. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

Exercice 5.

1. On définit la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x - 1 \end{array}$.

(a) Calculer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

(b) Construire le tableau des variations de g en précisant les limites et extrema éventuels.

(c) Justifier que g est une bijection de $[-1,+\infty[$ sur un intervalle à préciser.
En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution sur $[-1,+\infty[$ que l'on notera α.
Calculer $g(0)$ et en déduire que $\alpha > 0$.

2. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = e^x - \ln(x)$.

(a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.

(b) Démontrer que f' vérifie, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
En déduire le tableau des variations de f sur $]0,+\infty[$.

(c) Justifier que α vérifie $\frac{1}{\alpha} = e^\alpha$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.

3. On précise que $\alpha \approx 0,5$.
Tracer l'allure de la représentation graphique de f dans un repère d'unité 2cm.

Exercice 6.

On considère les deux fonctions f et g dont les expressions sont $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ et $g(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$.

1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g.

2. Calculer $f\left(\sqrt{3}\right)$ et $g\left(\sqrt{3}\right)$.

3. Justifier que f est paire et g est impaire.

4. Déterminer les limites de f et g en $+\infty$ et 1.
En déduire les limites de f et g en $-\infty$ et -1 en utilisant la parité de f et l'imparité de g.
Les courbes des fonctions f et g admettent-elles des asymptotes ?

5. Justifier que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.
Déterminer f' et montrer que $g' : x \mapsto \dfrac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$.
Les calculs seront détaillés.

6. Déduire des questions précédentes les tableaux des variations de f et g, dans lesquels figureront les limites et extrema.

7. Déterminer des équations des tangentes en $\sqrt{3}$ à la courbe de f et à la courbe de g.

8. Avec tous les éléments dont vous disposez, tracer le plus précisément possible les représentations graphiques de f et g avec tangentes et asymptotes.
(*faire deux graphiques, un pour f et un pour g*)
On précise que $\sqrt{3} \approx 1,7$.