INDICATIONS POUR LA CORRECTION DU DS n^{o} 1

À rendre pour mardi 8 octobre : exercices 1 et 2 suivant les indications, et au moins un (au choix) bien rédigé parmi les exercices 3, 4 et 5.
(exercice 6 facultatif)

Exercice 1.

✍ À refaire, avec le cours si besoin !

Exercice 2. Réponses.

✍ Refaire entièrement chaque calcul qui comportait une erreur sur la copie, vérifier la réponse !

1. $\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 31$.

2. $\underline{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2}$
Il faut utiliser la bilinéarité du produit scalaire et du déterminant, et la symétrie ou antisymétrie (voir exemples dans le cours).
$(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}).(-3\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v}) = -173 - 15\sqrt{2}$ et $[2\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v}; \frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}] = -25\sqrt{2}$

3. $z_1 = (\sqrt{2} - \frac{4}{3}) + i(1 + \frac{4}{3}\sqrt{2})$ et $z_2 = \frac{3}{5} + i\frac{1}{5}$.

4. $f'(x) = \frac{5x^4+2x^3+20x+2}{(5x^2+x)^2}$ et $g'(x) = \frac{25}{(3x-1)(x+8)}$

$h'(x) = -12\cos(5-3x)\sin^3(5-3x)$ (formule $(u^4)' = \ldots$ avec $u(x) = \sin(5-3x)$)

5. (a) $z + 4 = 3i(\overline{z} - 2)$ est définie sur $\mathbb{C}$.
On cherche z sous la forme $z = x + iy$, alors
$$\begin{aligned} z + 4 = 3i(\overline{z} - 2) &\iff x + iy + 4 = 3i(x - iy - 2) \\ &\iff x + 4 + iy = 3ix - 6i + 3y \\ &\iff (x + 4 - 3y) + i(y - 3x + 6) = 0 \end{aligned}$$
Un nombre complexe est nul si et seulement si les parties réelle et imaginaire sont nulles, ainsi l'équation de départ est équivalente au système : ... ✍

$\boxed{\text{La solution est le nombre complexe } z = \frac{11}{4} + \frac{9}{4}i}$.

(b) $z = \frac{5}{13} - \frac{14}{13}i$.

Exercice 3.

1. On pose $g(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$.

(a) *Attention, la racine carrée est définie sur* $[0, +\infty[$ *et dérivable sur* $]0, +\infty[$*, cela doit être signalé clairement !*
g est un produit :
⋆ la fonction affine $x \mapsto x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
⋆ la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est la composée du polynôme $x \mapsto x^2 - 1$ défini et dérivable sur $\mathbb{R}$, par la racine carrée, définie sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.
Or $x^2 - 1 > 0 \iff x \in]-\infty; -1[\cup]1, +\infty[$.
Donc cette composée est définie sur $]-\infty; -1] \cup [1, +\infty[$ et dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]1, +\infty[$.
Donc $\boxed{g \text{ est définie sur }]-\infty; -1] \cup [1, +\infty[\text{ et } \mathcal{D}_g =]-\infty; -1[\cup]1, +\infty[}$.

(b) On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$
$v(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ donc $v'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

✍ Donc,pour tout x de $\mathcal{D}_g$,
$$\begin{aligned} g'(x) &= \ldots \\ &= \ldots \\ &= \boxed{\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}} \end{aligned}$$

(c) Le signe du dénominateur est positif.
Au numérateur, $2x^2-1=0 \iff x^2=\frac{1}{2} \iff x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Or le coefficient de x^2 est positif donc :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$2x^2-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Or $-1<-\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{2}}<1$.
Donc $\forall x\in\mathcal{D}_g$, $g'(x)>0$.
Donc

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	0		0	$\nearrow$	

2. **(a)** *une fonction affine est un polynôme de degré 1, ce n'est pas le cas de f !*
✍ f est un polynôme, donc défini et dérivable sur ....
g est la fonction ln, définie et dérivable sur ....

(b) $\mathcal{D}_{g\circ f}=\{x\in\mathcal{D}_f\,|\,f(x)\in\mathcal{D}_g\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2x^2-3x+5>0\}$.

✍ *étudier le signe de* $2x^2-3x+5$

Donc $\boxed{g\circ f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g\circ f(x)=\ln(2x^2-3x+5)$.
✍ Et $(g\circ f)'(x)=\ldots$

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$(g\circ f)'(x)$		$-$	0	$+$	
$g\circ f$		$\searrow$		$\nearrow$	

✍ *signe de $(g\circ f)'(x)$ à justifier !*

Exercice 4.

1. $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AE}$ donc $\begin{pmatrix}x_F-5\\y_F+1\\z_F\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

Donc $x_F=2+5=7$, $y_F=1-1$ et $z_F=3$ autrement dit $\boxed{F(7;0;3)}$.

$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc .... donc $\boxed{G(8;1;3)}$

✍ **2.** Soit I le milieu de $[DF]$, $x_I=$ .... , de même, $y_I=\ldots$ et $z_I=\ldots$.
✍ *Procéder de même pour J milieu de $[AG]$.* Donc I et J ont les mêmes coordonnées donc sont égaux.
Donc $\boxed{\text{les segments } [DF] \text{ et } [AG] \text{ se coupent en leurs milieux}}$.

3. *Attention, pour un rectangle, l'aire est le produit des longueurs des côtés, pas pour un parallélogramme quelconque !*

On travaille dans l'espace, on ne peut donc pas calculer le déterminant des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, cela n'a pas de sens ! On pourrait projeter ces vecteurs sur le plan (O,x,y) mais il faudrait leur donner de nouveaux noms, et justifier que cela ne change pas l'aire ... c'est plus simple d'utiliser l'outil adapté à la dimension 3, le produit vectoriel !

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{A}_{ABCD} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = \boxed{4}.$$

✍ **4.** *Avec le produit scalaire et les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.*

✍ **5.** *utiliser le déterminant de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$*

Exercice 5.

$\boxed{e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}}$ *(et on ne peut pas arranger facilement $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$)*

✍ **1.** *Trouver d'abord la forme algébrique, puis la forme trigonométrique comme d'habitude.*

On trouve : $\boxed{z_A = -i\sqrt{3} = \dots}$ et $\boxed{z_B = -\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i = \dots}$ et $\boxed{z_C = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{5\pi}{3}}}$.

2. D'après la figure, on peut conjecturer que <u>ces droites sont perpendiculaires</u>.

3. $\frac{z_C - z_A}{z_B} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$: $\boxed{\text{le module est } \frac{1}{3} \text{ et un argument est } -\frac{\pi}{2}}$.

4. <u>Oui</u>, car $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AC}) = \mathrm{Arg}(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_O})\ (2\pi) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

Exercice 6.

1. $j = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}\times 2} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{0}$ et $j^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}\times 3} = e^{2i\pi} = \boxed{1}$.

2. $z_1 = a + b + c$ et a, b et c sont réels donc $\boxed{\mathrm{Re}\,(z_1) = a + b + c \text{ et } \mathrm{Im}\,(z_1) = 0}$.

$z_2 = a - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + ib\frac{\sqrt{3}}{2} - ic\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\boxed{\mathrm{Re}\,(z_2) = \dots\dots\dots\dots \text{ et } \mathrm{Im}\,(z_2) = \dots\dots\dots\dots}$

$z_3 = a - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} - ib\frac{\sqrt{3}}{2} + ic\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\boxed{\mathrm{Re}\,(z_3) = \dots\dots\dots\dots \text{ et } \mathrm{Im}\,(z_3) = \dots\dots\dots\dots}$

3. z_1, z_2 et z_3 sont réels si et seulement si leurs parties imaginaires sont toutes nulles.

Or $\mathrm{Im}\,(z_1) = 0$, de plus $\mathrm{Im}\,(z_2) = 0 \iff \frac{\sqrt{3}}{2}(b - c) = 0 \iff b = c$ et de même, $\mathrm{Im}\,(z_3) = 0 \iff b = c$.

Donc $\boxed{z_1,\ z_2 \text{ et } z_3 \text{ sont réels si et seulement si } b = c}$.

4. Les nombres z_1, z_2 et z_3 sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

C'est-à-dire $\begin{cases} a + b + c = a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(c - b) = \frac{\sqrt{3}}{2}(b - c) = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} b = 0 \\ b = c \end{cases}$

Ainsi, $\boxed{z_1 = z_2 = z_3 \iff b = c = 0}$.

$z_1 = z_2 = z_3 = 1 \iff \begin{cases} a + b + c = 1 \\ b = c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = c = 0 \end{cases}$ donc $\boxed{z_1 = z_2 = z_3 = 1 \text{ pour } a = 1 \text{ et } b = c = 0}$.