Nom - Prénom :

Devoir Surveillé n° 1

Le vendredi 27 septembre, 14h - 17h.

Calculatrice interdite.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Rappel : pour trouver les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$:

1. on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

2. – si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
– si $\Delta = 0$, l'équation a une solution : $x_1 = \frac{-b}{2a}$;
– si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

Exercice 1. Questions de cours (ou application directe).

1. Produit scalaire dans le plan :

(a) définition du produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

....

....

(b) propriété fondamentale :

....

(c) expression de $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ en fonction des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ notées ainsi $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

....

2. Produit vectoriel :

(a) définition du produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

....

....

....

....

(b) propriété fondamentale :

....

(c) expression de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ en fonction des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ notées ainsi $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$:

....

3. Écrire avec des mots : $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$:

. . . .

. . . .

. . . .

4. Qu'est-ce qu'un repère de l'espace ?

. . . .

5. Que signifie « l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ orienté par $\overrightarrow{k}$ est direct » ?

. . . .

. . . .

6. $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est une base orthonormée directe du plan.
Justifier que $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}); \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath})\right)$ est aussi une base orthonormée directe.

Exercice 2. Calculs.

1. Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Calculer $\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v}$ et $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

2. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan tels que l'angle orienté $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ soit égal à $-\frac{\pi}{4}$, et $\|\overrightarrow{u}\| = 3$ et $\|\overrightarrow{v}\| = 5$.
Calculer $(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}).(-3\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v})$ et $[2\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v}; \frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}]$.

3. Déterminer la forme algébrique des nombres suivants : $z_1 = \dfrac{3-4i}{\sqrt{2}+i}$ et $z_2 = \dfrac{i}{i + \frac{1}{1-i}}$.

4. Dériver les fonctions suivantes , sans se préoccuper de l'ensemble de définition.
$f(x) = \frac{x^3-2}{5x^2+x}$ $g(x) = \ln\left(\frac{3x-1}{x+8}\right)$ $h(x) = \sin^4(5-3x)$

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ (les résultats seront donnés sous forme algébrique) :
(a) $z + 4 = 3i(\overline{z} - 2)$ **(b)** $\frac{3z+1}{z-2} = 2i$

Exercice 3.

1. On pose $g(x) = x\sqrt{x^2-1}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de g et son ensemble de dérivabilité que l'on notera $\mathcal{D}_g$.

(b) Montrer que pour tout x de $\mathcal{D}_g$, $g'(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

(c) Construire le tableau des variations de g.

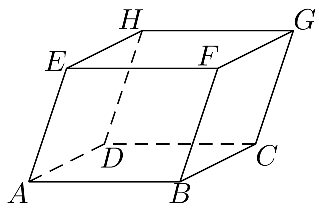
2. On définit $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ et $g(x) = \ln(x)$.

(a) Donner en le justifiant les ensembles de définition et de dérivabilité de f et g.

(b) Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de $g \circ f$.
Donner l'expression de $g \circ f(x)$ et étudier ses variations.

Exercice 4.

Dans un repère orthonormé direct de l'espace, on considère les points $A(1,-1,0)$, $B(5,-1,0)$, $D(2,0,0)$ et $E(3,0,3)$, puis on construit le parallélépipède $ABCDEFGH$.



1. Déterminer les coordonnées de F puis G.

2. Les segments $[DF]$ et $[AG]$ se coupent-ils en leurs milieux ?

3. Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$.

4. Déterminer une mesure de l'angle non orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

5. Déterminer le volume du parallélépipède $ABCDEFGH$.

Exercice 5.

Soient A, B et C des points du plan complexe dont les affixes sont

$$z_A = -2e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 \quad ; \quad z_B = -3e^{i\frac{\pi}{6}} + 3i \quad \text{et} \quad z_C = e^{5i\frac{\pi}{3}}$$

1. Donner les formes algébriques et trigonométriques de chacun de ces complexes.

2. Représenter ces points dans le plan complexe.
Que peut-on conjecturer* quant aux droites (AC) et (OB) ?
**Une conjecture est une simple supposition, une idée fondée sur des apparences.*

3. Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B}$ et en préciser un module et un argument.

4. Le résultat précédent confirme-t-il votre conjecture ?

Exercice 6.

On rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
Soient a, b et c trois nombres réels, on définit $z_1 = a + b + c$, $z_2 = a + bj + cj^2$ et $z_3 = a + bj^2 + cj$.

1. Justifier que $1 + j + j^2 = 0$ et que $j^3 = 1$.

2. Déterminer les parties réelles et imaginaires de z_1, z_2 et z_3 en fonction de a, b et c.

3. Montrer que z_1, z_2 et z_3 sont réels si et seulement si $b = c$.

4. À quelle(s) condition(s) sur a, b et c, les nombres z_1, z_2 et z_3 sont-ils égaux ?
En particulier, que valent a, b et c pour avoir $z_1 = z_2 = z_3 = 1$?