Correction du Devoir Maison n° 3

Légende :

❀❀ Questions à savoir refaire, à retravailler en priorité. Peuvent être considérées comme des applications directes du cours ou des calculs sans astuce particulière.

❀ Questions classiques, à travailler lorsque les autres sont sues.

Exercice 1.

❀❀ **1.** $\frac{z_A-z_B}{z-z_B}=-i \iff z_A-z_B=-i(z-z_B) \iff z_A-z_B-iz_B=-iz \iff z=iz_A-iz_B+z_B$ car $\frac{1}{-i}=i$.

Or $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$ et $z_B=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $z = i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \boxed{1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$.

❀ **2.** $\text{Arg}\,(-i)=-\frac{\pi}{2}$ donc $\text{Arg}\,(z_A-z_B)=\text{Arg}\,(z_C-z_B)-\frac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en B.

D'autre part, $|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}|=|-i|=1$ donc $|z_A-z_B|=|z_C-z_B|$ autrement dit $AB=BC$.

Donc le triangle ABC est isocèle en B.

Donc $\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est isocèle rectangle en } B}$.

Exercice 2.

❀❀ **1.** *forme indéterminée de type « $\frac{0}{0}$ », on essaie la quantité conjuguée*

$\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = \frac{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}{x(\sqrt{2x+1}+1)}$

$= \frac{2x+1-1}{x(\sqrt{2x+1}+1)}$

$= \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}=\boxed{1}$

2. *forme indéterminée de type « $\frac{0}{0}$ »sur une fraction rationnelle, on essaie de factoriser le numérateur et le dénominateur par un facteur qui tend vers 0.*

$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ et $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

Donc $\frac{x^6-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$= \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x+1}$

Donc $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x^2-1}=\frac{6}{2}=\boxed{3}$

3. pour $x<0$, $x^2+2|x|=x^2-2x$ donc $\frac{x^2+2|x|}{x}=x-2$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+2|x|}{x}=-\infty}$.

4. $(x^2-4)\ln(x-2)=(x+2)(x-2)\ln(x-2)$

- ⋆ $\lim\limits_{x\to 2^+} x+2=4$
- ⋆ $\lim\limits_{x\to 2^+} x-2=0$ et $\lim\limits_{X\to 0} X\ln(X)=0$ par le théorème des croissances comparées, donc par composition, $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\ln(x-2)=0$.
- ⋆ Donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-4)\ln(x-2)=0}$.

❀❀ **5.** $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x+2=+\infty$, donc par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-3x+2}=\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=\boxed{+\infty}$.

6. $\frac{x^3-e^x}{x^2+3x+1}=\frac{e^x(\frac{x^3}{e^x}-1)}{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}=\frac{e^x}{x^2}\times\frac{\frac{x^3}{e^x}-1}{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}$

- ⋆ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ (par théorème des croissances comparées) ;
- ⋆ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=0$ (même théorème)

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{e^x}-1}{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=-1$.

Donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-e^x}{x^2+3x+1}=-\infty}$.

❀ **7.** **(a)** $\forall x\in\mathbb{R}$, $-1\leqslant\cos(x)\leqslant 1$ donc $1\geqslant-\cos(x)\geqslant-1$ donc $3\geqslant 2-\cos(x)\geqslant 1$.

Ces trois nombres sont strictement positifs et la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{2-\cos(x)}\leqslant 1}$.

(b) Pour $x > -1$, on a $x+1 > 0$, donc d'après le résultat précédent, on obtient $\boxed{\frac{x+1}{3} \leqslant \frac{x+1}{2-\cos(x)}}$.

(c) Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{3} = +\infty$ donc par comparaison, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2-\cos(x)} = +\infty}$.

5. (a) *imprécision dans l'énoncé : l'égalité est valable pour $x > 0$ uniquement, ce qui est suffisant pour étudier la limite en $+\infty$*

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x^2-x+1}-2x &= \frac{(\sqrt{4x^2-x+1}-2x)(\sqrt{4x^2-x+1}+2x)}{\sqrt{4x^2-x+1}+2x} \\
&= \frac{4x^2-x+1-(2x)^2}{\sqrt{4x^2-x+1}+2x} \\
&= \frac{x(-1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}+2x} \qquad \text{pour } x \neq 0 \\
&= \frac{x(-1+\frac{1}{x})}{x\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x} \qquad \text{pour } x > 0 \\
&= \boxed{\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}}
\end{aligned}$$

(b) Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-x+1}-2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} -1+\dfrac{1}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+2 = 2+2 = 4$

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-x+1}-2x = -\dfrac{1}{4}}$.

Exercice 3.

❀❀ **1.** $\boxed{f(\llbracket 0;4\rrbracket) = \llbracket 1;5\llbracket}$ et $\boxed{f^{-1}(\llbracket -2;3\rrbracket) = \llbracket 0;2\rrbracket}$ et $\boxed{g(\llbracket 0;4\rrbracket) = \llbracket 0;3\llbracket}$.

❀❀ **2.** • Soient n et n' dans $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$, alors $n+1 = n'+1$ donc $n = n'$.
Donc $\boxed{f \text{ est injective}}$.

0 n'a pas d'antécédent par f.
En effet, $f(n) = 0 \iff n+1 = 0 \iff n = -1$ et -1 n'est pas dans l'ensemble de définition de f. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$.

• pour g :
$g(0) = 0$ et $g(1) = 0$ donc $\boxed{g \text{ n'est pas injective}}$.

Soit y dans $\mathbb{N}$, déterminons n dans $\mathbb{N}$ tel que $g(n) = y$.
$y \in \mathbb{N}$ donc $y+1 \geqslant 1$, donc $g(y+1) = (y+1)-1 = y$.
Ainsi, en posant $n = y+1$, on a bien $n \in \mathbb{N}$ et $g(n) = y$.
Donc tout y de $\mathbb{N}$ a (au moins) un antécédent par g dans $\mathbb{N}$, donc $\boxed{g \text{ est surjective}}$.

Attention : *La rédaction est ici indispensable : sans contexte « $f(n) = f(n')$ » peut avoir plusieurs sens ! Pour rédiger correctement, il faut être très à l'aise avec les définitions de l'injectivité et surjectivité ... ne pas hésiter à les réviser ou ré-apprendre !*

❀❀ **3.** $f \circ g(0) = f(g(0)) = f(0) = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $g(n) = n-1$ donc $f \circ g(n) = f(n-1) = (n-1)+1 = n$.

Donc $\boxed{f \circ g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $g \circ f(n) = g(n+1) = (n+1)-1$ (car $n+1 \geqslant 1$) donc $\boxed{f \circ g(n) = n}$.

Exercice 4.

1. *Encore une erreur d'énoncé ... la fonction f définie ainsi n'a pas de sens, en effet $f(1,2) = (3,-1)$ ce qui n'appartient pas à $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ... On considère pour ce corrigé que f est définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

- Montrons que f est injective.
  Soient (x, y) et (x', y') dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
  On suppose que $f(x, y) = f(x', y')$.
  Alors $(x+y, x-y) = (x'+y', x'-y')$ donc $\left\{\begin{array}{ll} x+y = x'+y' & (1) \\ x-y = x'-y' & (2) \end{array}\right.$
  $(1)+(2)$ donne $2x = 2x'$ donc $x = x'$
  $(1)-(2)$ donne $2y = 2y'$ donc $y = y'$
  Donc $(x, y) = (x', y')$.
  Donc $\underline{f \text{ est injective}}$.
- Montrons que $(1, 2)$ n'a pas d'antécédent par f :
  supposons que $f(x, y) = (1, 2)$, alors $x + y = 1$ et $x - y = 2$.
  En ajoutant les deux égalités, on obtient $2x = 3$, ce qui n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.
  Donc $\underline{f \text{ n'est pas surjective}}$.
- $\underline{f \text{ n'est pas bijective}}$.

2. Montrons que g est bijective : soit $y \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$, résolvons l'équation $g(z) = y$.

$$\begin{aligned} g(z) = y &\iff \tfrac{iz-i}{z+3} = y \\ &\iff iz - i = y(z+3) \\ &\iff iz - yz = 3y + i \\ &\iff z(i-y) = 3y + i \\ &\iff z = \tfrac{3y+i}{i-y} \qquad \text{car } y \neq i \end{aligned}$$

De plus, $z \neq -3$ car $\frac{3y+i}{i-y} = -3 \iff 3y + i = -3i + 3y \iff i = -3i$ ce qui est faux.
Donc tout y de $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ a un unique antécédent dans $\mathbb{C}\backslash\{-3\}$: $\frac{3y+i}{i-y}$.
Donc $\underline{g \text{ est bijective, donc injective et surjective}}$ et $\boxed{\begin{array}{cccc} g^{-1}: & \mathbb{C}\backslash\{i\} & \to & \mathbb{C}\backslash\{-3\} \\ & y & \mapsto & \frac{3y+i}{i-y} \end{array}}$.

3. Montrons que h est bijective : $\forall n \in \mathbb{Z},\ h(x) = n \iff x + 1 = n \iff x = n - 1$.
Autrement dit $n - 1$ est l'unique antécédent de n par h.
Donc $\underline{h \text{ est bijective, donc injective et surjective}}$ et $\boxed{\begin{array}{cccc} h^{-1}: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & n-1 \end{array}}$.

Exercice 5.

La seule fonction qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle. Donc si l'on a prouvé que la fonction est paire (et qu'elle n'est pas nulle), on peut directement affirmer qu'elle n'est pas impaire.

Attention : *Pour montrer qu'une fonction n'est pas paire, constater que les formules de $f(x)$ et $f(-x)$ n'ont pas l'air égales ne suffit pas, seul un contre-exemple chiffré permet de convaincre qu'elles ne le sont pas. Mais pour montrer qu'une fonction est paire, il faut montrer l'égalité <u>pour tout</u> x de l'ensemble de définition. Ne pas oublier le quantificateur !*

- *erreur d'énoncé sur l'ensemble de définition :* $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
  L'ensemble de définition est centré en 0 car $\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$.
  Donc on peut écrire $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\left(\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{-\frac{\pi}{2} - k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}\right)$.

  $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = \left((-x)^3 - (-x)\right)\tan(-x) = \left(-x^3 + x\right)\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -(x^3 - x)\frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = (x^3 - x)\tan(x) = f(x)$.
  Donc $\boxed{f \text{ est paire}}$, et f n'est pas la fonction nulle donc $\boxed{f \text{ n'est pas impaire}}$.

❀❀ • $g(x) = x + \frac{3}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$:
$\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$ et $g(-x) = -x + \frac{3}{-x} = -x - \frac{3}{x}$
Et $-g(x) = -\left(x + \frac{3}{x}\right) = -x - \frac{3}{x} = g(-x)$
Donc $\boxed{g \text{ est impaire et non paire}}$ (g n'est pas la fonction nulle).

❀❀ • $h(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}$: l'ensemble de définition est centré en 0.
$\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = \sin\left(\frac{-x}{2}\right) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -h(x)$ donc $\boxed{h \text{ est impaire et non paire}}$.

❀❀ • $k(x) = \sin(5x) + x\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$:
$\forall x \in \mathbb{R}, k(-x) = \sin(5 \times (-x)) + (-x) \times \cos(-x) = -\sin(5x) - x\cos(x)$ (car sin est impaire et cos est paire).
Et donc $-k(x) = -(\sin(5x) + x\cos(x))$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, k(-x) = -k(x)$, donc $\boxed{k \text{ est impaire et pas paire}}$.

❀❀ • $\ell(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 1}{-2x^3 - 3x}$ sur $\mathbb{R}^*$:
$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ell(-x) = \frac{(-x)^4 - 3(-x)^2 + 1}{-2(-x)^3 - 3(-x)} = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{2x^3 + 3x}$.
Et $-\ell(x) = -\frac{x^4 - 3x^2 + 1}{-2x^3 - 3x} = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{-(-2x^3 - 3x)} = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{2x^3 + 3x} = \ell(-x)$.
Donc $\boxed{\ell \text{ est impaire et pas paire}}$.

Exercice 6.

❀❀ **1.** • <u>f en $+\infty$:</u> $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par le théorème des croissances comparées.
Donc d'après les règles sur les limites de sommes de fonctions, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

❀❀ • <u>f en 0 :</u>

⋆ $\lim\limits_{x \to 0} x + 1 = 0 + 1 = 1$

⋆ $\frac{\ln(x)}{x} = \ln(x) \times \frac{1}{x}$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\}$ donc la règle du produit de limites, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$,

donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty}$.

❀❀ • <u>g en $+\infty$:</u> $g(x) = x^2\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

cette factorisation est obligatoire car le théorème des croissances comparées ne s'applique pas sur une somme !

Or par le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

Donc par somme puis produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$.

❀❀ • $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty}$ (somme et différence de limites usuelles)

❀❀ **2.** $g'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 1}{x} = \boxed{\dfrac{2(x^2 - \frac{1}{2})}{x}}$

Les racines de $x^2 - \frac{1}{2}$ sont $\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{1}{2}}$,
soit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
De plus, le coefficient de x^2 est positif.
On en déduit le signe de $g'(x)$ et les variations de g dans le tableau ci-contre.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$x^2 - \frac{1}{2}$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g	$\Vert$	↘		↗	

Attention : *Résoudre $2x - \frac{1}{x} = 0$ ne donne que la position du 0, pas les signes !*
Donc soit on procède comme ci-dessus, soit on résout l'inéquation $2x - \frac{1}{x} > 0$.

3. $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \ln(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} + 1 + \ln(\sqrt{2}) = \boxed{\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(2)}$.

Donc, d'après les variations de g, $g(x)$ est minorée par $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2)$.
Or $\ln(2) > 0$ (car $2 > 1$), donc $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2) > 0$.
Donc $\boxed{g(x) \text{ est positif strictement sur }]0;+\infty[}$.

❀❀ **4.** On utilise $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $\left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln(x) & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{array} \right.$.

$$\begin{aligned} \text{Alors} \quad f'(x) &= 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{x^2}{x^2} + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} \\ &= \boxed{\frac{g(x)}{x^2}} \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

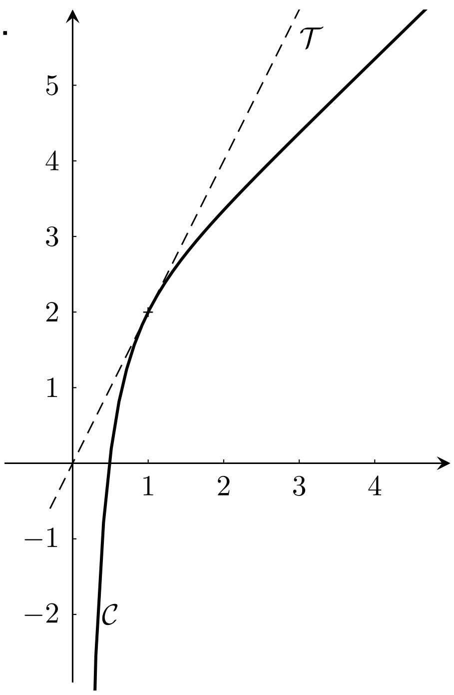
❀❀ **5.** Ainsi, $f'(x) > 0$ car $g(x) > 0$ et $x^2 > 0$, donc

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

6. f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
Donc, d'après le tableau des variations avec les limites : $\boxed{f \text{ est une bijection de }]0, +\infty[\text{ sur } \mathbb{R}}$.

❀❀ **7.** $\mathcal{T}$ a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
Or $f'(1) = \frac{g(1)}{1^2} = 2$ et $f(1) = 2$ donc $\boxed{\mathcal{T} \text{ a pour équation } y = 2x}$.

8.



❀❀ **9.** **(a)**

```
from math import *
n=int(input('donner une valeur de n : '))
u=1
for k in range(n):
    u=u+1+log(u)/u
print('le terme de la suite de rang',n,'est',u)
```

(b)

```
n=0
u=1
while u<=10000:
    u=u+1+log(u)/u
    n=n+1
print('le plus petit n tel que u_n>10000 est ',n)
```