Devoir Maison n° 3

Pour le mardi 5 novembre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Exercice 1.

On considère les points A d'affixe $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et B d'affixe $e^{5i\frac{\pi}{3}}$.

1. Déterminer le complexe z tel que $\frac{z_A - z_B}{z - z_B} = -i$.

2. On appelle C le point du plan d'affixe z (solution de l'équation précédente).
Que peut-on dire du triangle ABC ?

Exercice 2.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^6-1}{x^2-1}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} (x^2-4)\ln(x-2)$.

5. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \sqrt{-3x+2}$

6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-e^x}{x^2+3x+1}$

7. **(a)** Encadrer $\frac{1}{2-\cos(x)}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire un minorant de $\frac{x+1}{2-\cos(x)}$.

(c) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{2-\cos(x)}$.

8. **(a)** Montrer que $\sqrt{4x^2-x+1}-2x = \dfrac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}$.

(b) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{4x^2-x+1}-2x$.

Exercice 3.

Soient f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :
$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n+1$ et $g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$.

1. Déterminer $f([\![0;4]\!])$, $f^{-1}([\![-2;3]\!])$ et $g([\![0;4]\!])$.

2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et de g.

3. Déterminer $f \circ g$ (*on pourra distinguer les cas* $n = 0$ *et* $n \geqslant 1$) et $g \circ f$.

Exercice 4.

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
En cas de bijectivité, déterminer la réciproque.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$

2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{-3\} & \to & \mathbb{C}\backslash\{i\} \\ z & \mapsto & \frac{iz-i}{z+3} \end{array}$

3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$

Exercice 5.

Étudier la parité ou imparité des fonctions suivantes :

$f(x) = (x^3-x)\tan(x)$ sur $\mathbb{R}$

$g(x) = x + \frac{3}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

$h(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}$

$k(x) = \sin(5x) + x\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$

$\ell(x) = \dfrac{x^4-3x^2+1}{-2x^3-3x}$ sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 6.

On considère les fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

2. Calculer la dérivée de g. En déduire le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$.

3. Montrer que $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2)$. En déduire que $g(x)$ est positif strictement sur $]0;+\infty[$.

4. Montrer que la dérivée de f vérifie pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

5. Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites.

6. Justifier que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers un ensemble à préciser.

7. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en $x = 1$. On appelle $\mathcal{T}$ cette tangente.

8. Tracer la droite $\mathcal{T}$ et l'allure de $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

9. **(a)** Construire un programme `python` qui demande à l'utilisateur une valeur de `n` et renvoie le terme de rang `n` de la suite.

(b) Construire un programme `python` qui déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 10000$.
On admet qu'un tel n existe.

Conseils pour les vacances.

Ce devoir est un peu long mais permet de bien travailler les notions abordées en ce début d'année.
C'est l'occasion d'aller chercher dans le cours pour retrouver et apprendre les définitions, théorèmes et propriétés qui pourraient être utiles.

Il peut être une base de travail pour se remettre à jour en suivant les conseils ci-dessous.

Points essentiels à connaître par cœur (*faire des fiches avec ces éléments, les lire, les relire, les écrire au brouillon, les ré-écrire, les réciter …*) **:**
- fonctions usuelles : courbes et ensembles de définition et limites ;
- définition de $f \circ g$;
- limites issues des taux d'accroissements ou du théorème des croissances comparées ;
- théorème des gendarmes et théorème de comparaison de limites ;
- formules de dérivées, équation de la tangente ;
- définitions d'une application injective, surjective, bijective ;
- définitions et interprétations géométriques du produit scalaire, produit vectoriel, déterminant ;
- …

Techniques à connaître et pratiquer (*refaire les exemples du cours, sans regarder le cours, plusieurs fois s'il le faut, refaire des exercices, faire une fiche avec les étapes principales, des astuces, des erreurs à éviter …*) **:**
- pour un nombre complexe, déterminer la forme algébrique et la forme exponentielle ;
- calculer une dérivée, déterminer une primitive ;
- déterminer des limites ;
- construire le tableau des variations d'une fonction ;
- signes et racines des polynômes (degrés 1, 2 et 3) ;
- étudier la parité et la périodicité d'une fonction ;
- savoir justifier qu'une fonction numérique est une bijection ;
- déterminer si deux vecteurs sont colinéaires, orthogonaux …
- …

Les vacances sont aussi le moment de faire le point sur les méthodes de travail, d'apprentissage …

Mais il est essentiel <u>avant tout</u> de prendre du temps de détente et de repos !