Correction du DM n° 26

Correction 3. (feuille Espaces vectoriels B)

1. La matrice des vecteurs en colonne est $\begin{pmatrix}1&1&0&0&3\\0&1&-2&0&1\\0&1&-2&0&1\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$.

Elle est équivalente en lignes à $\begin{pmatrix}1&1&0&0&3\\0&0&-2&0&-2\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

Elle est donc de rang 3.
Donc $\boxed{F \text{ est de dimension } 3}$.

2. La famille (f_1, f_2, f_4) est libre (*justifications possibles : combinaison linéaire nulle, correspondent aux pivots dans la matrice échelonnée précédente, 0 à des endroits différents ...*).
Elle est formée de 3 vecteurs de F qui est de dimension 3.
Donc $\boxed{(f_1, f_2, f_4) \text{ est une base de } F}$ (extraite de $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$).

Correction 4. (feuille Espaces vectoriels B)

1. Matrice des vecteurs en colonne : $\begin{pmatrix}1+i&0&-2\\1&1-i&3+i\\0&1&2+2i\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&1-i&3+i\\1+i&0&-2\\0&1&2+2i\end{pmatrix}$ $L_2 \leftrightarrow L_1$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&1-i&3+i\\0&-2&-4-4i\\0&1&2+2i\end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - (1+i)L_1$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&1-i&3+i\\0&-2&-4-4i\\0&0&0\end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_3 + \tfrac{1}{2}L_2$$

La matrice est de rang 2 donc $\boxed{\text{la famille } (u, v, w) \text{ est de rang } 2}$ aussi.

2. Matrice des vecteurs en colonne : $A = \begin{pmatrix}-4&2&b\\9&a&18\\2&-1&4\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{b}{4}\\9&a&18\\2&-1&4\end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow -\frac{1}{4}L_1$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{b}{4}\\0&a+\frac{9}{2}&18+\frac{9b}{4}\\0&0&4+\frac{b}{2}\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}L_2 \leftarrow L_2 - 9L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2\end{matrix}$$

Or, $a + \frac{9}{2} = 0 \iff a = -\frac{9}{2}$ et $4 + \frac{b}{2} = 0 \iff b = -8$.

Donc : • si $a = -\frac{9}{2}$:

⋆ si $b = -8$, on a aussi $18 + \frac{9b}{4} = 0$ donc le rang de la famille est 1 ;

⋆ si $b \neq -8$, on a $A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{b}{4}\\0&0&18+\frac{9b}{4}\\0&0&0\end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{9}L_2$

donc puisque $18 + \frac{9b}{4} \neq 0$, la famille est de rang 2 ;

• si $a \neq -\frac{9}{2}$:

⋆ si $b = -8$, on aura $A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&2\\0&a+\frac{9}{2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, donc la famille est de rang 2 ;

⋆ si $b \neq -8$ la matrice a 3 pivots donc la famille est de rang 3.

Finalement : $\boxed{\begin{array}{l}\text{si } a = -\frac{9}{2} \text{ et } b = -8 : \text{rang } 1.\\ \text{si } a = -\frac{9}{2} \text{ et } b \neq -8 \text{ ou } a \neq -\frac{9}{2} \text{ et } b = -8 : \text{rang } 2\\ \text{sinon le rang est } 3.\end{array}}$

Correction 1. (exercice proposé par Gabin)

arguments indispensables soulignés

Kevin répète 82 fois une épreuve : lancer son crayon.
En appelant succès l'issue « le crayon donne la bonne réponse », l'épreuve est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{5}$ (car le crayon est équilibré et il n'y a qu'une bonne réponse parmi les 5).
Les épreuves sont identiques et indépendantes les unes des autres (les questions sont indépendantes, et les lancers aussi), donc l'expérience de Kévin est un schéma de Bernoulli.
Y est le nombre de succès de ce schéma, donc $\boxed{Y \text{ suit la loi binomiale de paramètres } 82 \text{ et } \frac{1}{5}}$.

Alors $\boxed{Y(\Omega) = [\![0, 82]\!] \text{ et } \forall k \in Y(\Omega), \mathbf{P}(Y = k) = \binom{82}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{82-k}}$.

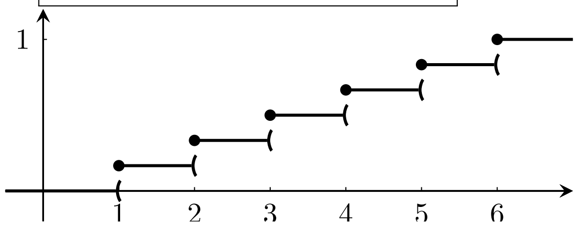
Alors $E(Y) = 82 \times \frac{1}{5} = \boxed{16,4}$.

En moyenne, Kévin peut espérer 16,4 bonnes réponses à son QCM, soit une note de 4/20 (un apprentissage du cours aurait sans aucun doute permis d'augementer son espérance ☺).

Autre rédaction possible : Kevin répète 82 fois une épreuve : lancer son crayon.
Les épreuves sont identiques et indépendantes les unes des autres .
Chaque épreuve a deux issues :
⋆ le crayon tombe donne la bonne réponse, c'est le succès, sa probabilité est $p = \frac{1}{5}$;
⋆ le crayon ne donne pas la bonne réponse, c'est l'échec.
Y compte le nombre de succès, donc $\boxed{Y \text{ suit la loi binomiale de paramètres } 82 \text{ et } \frac{1}{5}}$.

Correction 2.

1. Les dés sont équilibrés donc $\boxed{X \text{ suit la loi uniforme sur } [\![1, 6]\!]}$.
Fonction de répartition :



2. Le minimum de deux nombres entre 1 et 6 peut aller de 1 à 6 : $\boxed{U(\Omega) = [\![1, 6]\!] \text{ et } V(\Omega) = [\![1, 6]\!]}$.

3. $(U > x)$ signifie que le minimum des deux dés est strictement plus grand que x, c'est-à-dire les deux dés ont un résultat strictement que x soit $X > x$ et $Y > x$.
Donc $\boxed{(U > x) = (X > x) \cap (Y > x)}$.
Or $\mathbf{P}(U > x) = 1 - \mathbf{P}(U \leqslant x)$, donc $\boxed{\mathbf{P}(U > x) = 1 - F_U(x)}$.
De même, $\mathbf{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$ et $\mathbf{P}(Y > x) = 1 - F_Y(x)$.
Or les résultats des deux dés sont indépendants l'un de l'autre, donc $\mathbf{P}(U > x) = \mathbf{P}(X > x)\mathbf{P}(Y > x)$.
Et donc $1 - F_U(x) = (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x))$.
Donc $\boxed{F_U(x) = 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x))}$.

4. $(V \leqslant x)$ signifie que le maximum des deux dés est inférieur ou égal à x, c'est-à-dire que les deux dés donnent un résultat inférieur ou égal à x.
Autrement dit $(V \leqslant x) = (X \leqslant x) \cap (Y \leqslant x)$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}(V \leqslant x) &= \mathbf{P}((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant x)) \\ &= \mathbf{P}(X \leqslant x) \times \mathbf{P}(Y \leqslant x) \quad \text{par indépendance des résultats des deux dés} \\ \text{donc } F_V(x) &= F_X(x) \times F_Y(x)\end{aligned}$$

$\mathbf{P}(V = 1) = F_V(1) = F_X(1) \times F_Y(1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ (X et Y suivent la même loi).
Donc $\mathbf{P}(V = 1) = \frac{1}{36}$.
$\mathbf{P}(V = 2) = F_V(2) - F_V(1) = F_X(1) \times F_Y(1) - \frac{1}{36} = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} - \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.
On peut continuer ainsi jusqu'à $(V = 6)$ ou chercher une formule.

Tout d'abord, $\forall k \in [\![1,6]\!], \mathbf{P}(V=k) = F_V(k) - F_V(k-1)$.
De plus, $\forall k \in [\![0,6]\!], F_Y(k) = F_X(k) = \frac{k}{6}$.
Ainsi, $\forall k \in [\![1,6]\!], \mathbf{P}(V=k) = \left(\frac{k}{6}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^2 = \frac{2k-1}{36}$.
Donc la loi de V est donnée par $\boxed{V(\Omega) = [\![1,6]\!] \text{ et } \forall k \in [\![1,6]\!], \mathbf{P}(V=k) = \frac{2k-1}{36}}$.

5. En notant N la note attribuée à chaque élève, on remarque que $N = 3V$, donc $E(N) = 3E(V)$ (linéarité de l'espérance).
Pour calculer $E(V)$, on peut calculer la somme des 6 termes explicitement, ou utiliser la formule :
$$E(V) = \sum_{k=1}^{6} k\frac{2k-1}{36} = \frac{1}{18}\sum_{k=1}^{6} k^2 - \sum_{k=1}^{6}\frac{1}{36} = \frac{1}{18} \times \frac{6\times 7\times 13}{6} - \frac{6}{36} = \frac{91}{18} - \frac{3}{18} = \frac{88}{18}.$$
Donc $E(N) = 3 \times \frac{88}{18} = \boxed{\frac{87}{6}}$.

$E(N) \approx 14,67$, donc avec cette méthode de notation, la moyenne au devoir sera environ 14,67.