Devoir Maison n° 25

Pour le mardi 19 mai.

Rappel : la présentation et la rédaction entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies ! Encadrez les réponses, soignez les justifications ...

Exercice 1.

On pourra utiliser les valeurs approchées : $e^{-1} \approx 0,4$ *et* $e^{-2} \approx 0,1$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-x} - 1$.

- **(a)** Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- **(b)** Étudier le sens de variation de f.
- **(c)** Établir que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée α.
- **(d)** Justifier que $\alpha \in [1; 2]$.

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-x} + 1$. On définit également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$.

- **(a)** Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet comme unique solution sur $\mathbb{R}$ le réel α défini en **1.(c)**.
- **(b)** Montrer que pour tout réel x de $[1; 2]$, $|h'(x)| \leqslant \dfrac{1}{e}$.
- **(c)** Prouver que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
- **(d)** Établir que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$.
- **(e)** En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{e^n}$.
- **(f)** Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.