Correction du DM n° 25

Correction 1.

1. (a) On a $f(x)=(x-1)-e^{-x}$.

• en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$, et par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{u\to-\infty} e^{u}=0$.

Donc par différence, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

• en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1=-\infty$ et par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim\limits_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty$ donc par différence, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$.

(b) f est dérivable par somme de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, et $f'(x)=1-(-e^{-x})=1+e^{-x}$.
L'exponentielle est à valeurs strictement positives, donc $f'(x)>0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

(c) ⋆ f est continue sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions de référence continues sur $\mathbb{R}$)
⋆ f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
⋆ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
Donc par le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Donc 0 a un unique antécédent par f, autrement dit, $\boxed{\text{l'équation } f(x)=0 \text{ a une unique solution sur } \mathbb{R}}$.

(d) $f(1)=1-e^{-1}-1\approx-0,4$
et $f(2)=2-e^{-2}-1\approx 1-0,1\approx 0,9$
et par définition, $f(\alpha)=0$.
Donc $f(1)<f(\alpha)<f(2)$.
Or f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $1<\alpha<2$.
Ainsi, $\boxed{\alpha\in\ [1;2]}$.

2. (a) $h(x)=x \iff e^{-x}+1=x \iff 0=x-e^{-x}-1 \iff f(x)=0$
Donc les équations $h(x)=x$ et $f(x)=0$ sont équivalentes, donc elles ont mêmes solutions.
Ainsi, d'après **1.(c)**, $\boxed{\text{l'équation } h(x)=x \text{ admet comme unique solution sur } \mathbb{R} \text{ le réel } \alpha}$.

(b) Pour tout réel x de $[1;2]$, h est dérivable, et $h'(x)=-e^{-x}=-\dfrac{1}{e^x}$.
Alors, pour $1\leqslant x\leqslant 2$, si l'on applique la fonction exponentielle, croissante, on obtient :

$$e^1\leqslant e^x\leqslant e^2$$
$$\frac{1}{e}\geqslant\frac{1}{e^x}\geqslant\frac{1}{e^2} \text{ (par inverse, les trois nombres étant strictement positifs)}$$
$$-\frac{1}{e}\leqslant -h'(x)\leqslant-\frac{1}{e^2}<0$$

On a donc, pour tout x de $[1;2]$, $-\dfrac{1}{e}\leqslant h'(x)<0$, donc $\boxed{|h'(x)|\leqslant\dfrac{1}{e}}$.

(c) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition $1\leqslant u_n\leqslant 2$.

Initialisation : Pour $n=0$, il faut montrer que $1\leqslant u_0\leqslant 2$.
Or $u_0=1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $1\leqslant u_k\leqslant 2$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On sait que $u_{k+1}=h(u_k)$.
De plus, par hypothèse de récurrence, $1\leqslant u_k\leqslant 2$.
Or $\forall x\in[1,2], h'(x)=-e^{-x}\leqslant 0$ donc h est décroissante, donc $h(1)\geqslant h(u_k)\geqslant h(2)$.
$h(1)\approx 1,4\leqslant 2$ et $h(2)\approx 1,1\geqslant 1$ donc $2\geqslant h(u_k)\geqslant 1$.
C'est-à-dire $1\leqslant u_{k+1}\leqslant 2$.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\text{pour tout } n,\ 1\leqslant u_n\leqslant 2}$.

(d) $\star$ h est continue sur $[1,2]$
$\star$ h est dérivable sur $]1,2[$
$\star$ pour tout x de $]1,2[$, $|h'(x)| \leqslant \dfrac{1}{e}$
De plus, pour tout n, $u_n \in [1,2]$, et $\alpha \in [1,2]$.
Ainsi, pour tout n, nous pouvons appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction h, entre α et u_n.
On obtient : $|h(u_n) - h(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$.
Comme $h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(\alpha) = \alpha$, on a bien $\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha| \text{ pour tout } n}$.

(e) On définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ par $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{e^n}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $|u_n - \alpha| = |u_0 - \alpha| = |1 - \alpha|$.
Or $\alpha \in [1;2]$, donc $|1 - \alpha| \leqslant 1$.
De plus, $\frac{1}{e^0} = 1$, donc l'inégalité est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $|u_k - \alpha| \leqslant \frac{1}{e^k}$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On sait, par la question précédente que $|u_{k+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{e}|u_k - \alpha|$ $(*)$.
Or par hypothèse de récurrence, $|u_k - \alpha| \leqslant \frac{1}{e^k}$.
On multiplie cette inégalité par $\frac{1}{e} > 0$, on obtient $\frac{1}{e}|u_k - \alpha| \leqslant \frac{1}{e} \times \frac{1}{e^k} = \frac{1}{e \times e^k} = \frac{1}{e^{k+1}}$.
Ainsi avec la relation $(*)$, on déduit $|u_{k+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{e}|u_k - \alpha| \leqslant \frac{1}{e^{k+1}}$.
Donc $|u_{k+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{e^{k+1}}$ CQFD.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\text{pour tout } n,\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{e^n}}$.

(f) Par la question précédente, pour tout n de $\mathbb{N}$, $-\dfrac{1}{e^n} \leqslant u_n - \alpha \leqslant \dfrac{1}{e^n}$.

Or $e \approx 2,71$ donc $e > 1$ donc la suite (e^n) a pour limite $+\infty$. Donc par inverse, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{e^n} = 0$.
Donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$: $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } \alpha}$.