Devoir Maison n° 24

Pour le mardi 12 mai.

Exercice 1.

1. Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère la famille formée des fonctions $f_1 : x \mapsto \cos(x)$ et $f_2 : x \mapsto \cos(2x)$.
Cette famille est-elle libre ?
Montrer qu'elle n'est pas génératrice de E.

2. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on s'intéresse à la famille $P_1 = X + 1$, $P_2 = 2X - 4$, $P_3 = X^2 + 7$, et $P_4 = 2$.
Cette famille est-elle libre ? génératrice de E ?

3. On note $E = \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
La famille (A, B, C) est-elle libre ? génératrice de E ?

4. Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note u la suite définie pour tout n par $u_n = 2n + 1$ et v la suite constante égale à 3.
La famille formée par u et v est-elle libre ?
On note F le sous-espace vectoriel de E formé des suites arithmétiques. Montrer que (u, v) est une famille génératrice de F.

Exercice 2. Fin de l'ex12 des espaces vectoriels A.

Montrer que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - t = 0 \text{ et } x + 2y + 3z + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.

Exercice 3.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad h(x) = (1 + x)^{1-x}$ $\quad l(x) = xe^{\sin(x)}$

$g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ $\quad k(x) = \left(\arctan\left(\frac{1-x^2}{x}\right)\right)^3$ $\quad m(x) = \sqrt{\frac{\ln(x)}{x^2+1}}$

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$.

1. Justifier que f est dérivable à gauche et à droite en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

2. f est-elle dérivable en 1 ?