Correction du DM n° 24

Correction 1.

1. • libre ?
Soient λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \mathbf{0}$.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0$, soit $\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \cos(2x) = 0$
En particulier, pour $x = \frac{\pi}{2}$, $\lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times (-1) = 0$ donc $\lambda_2 = 0$.
Donc pour $x = 0$, $\lambda_1 \times 1 + 0 = 0$ donc $\lambda_1 = 0$.
Donc la seule combinaison linéaire des fonctions f_1 et f_2 qui est égale à la fonction nulle, est celle dont les scalaires sont tous les deux nuls.
Donc $\boxed{f_1 \text{ et } f_2 \text{ forment une famille libre}}$.

• génératrice de E ?
Montrons que la fonction sin n'est pas combinaison linéaire de f_1 et f_2.
Supposons qu'il existe λ_1 et λ_2 tels que $\sin = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \cos(2x) = \sin(x)$.
Pour $x = 0$, on a $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ soit $\lambda_1 = -\lambda_2$.
Et pour $x = \pi$, on aura $-\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ soit $\lambda_1 = \lambda_2$.
Donc la seule possibilité est $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ce qui n'est pas possible car la fonction sin n'est pas la fonction nulle.
Donc $\sin \notin \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$, donc $\boxed{\text{la famille } (f_1, f_2) \text{ n'est pas génératrice de } E}$.

2. • libre ?
Soient λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 des scalaires tels que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = \mathbf{0}$ $(*)$.
$(*) \iff \lambda_3 X^2 + (\lambda_1 + 2\lambda_2)X + (\lambda_1 - 4\lambda_2 + 7\lambda_3 + 2\lambda_4) = \mathbf{0}$.
Le polynôme nul est celui dont tous les coefficients sont nuls, donc l'égalité précédente est équivalente à $\begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 4\lambda_2 + 7\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases}$
On remarque que $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$ et $\lambda_4 = -\frac{5}{2}$ est une solution du système.
Ainsi, $P_1 - P_2 - \frac{5}{2}P_4 = 0$ donc $\boxed{\text{la famille } (P_1, P_2, P_3, P_4) \text{ est liée}}$.

• génératrice de E ?
Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$.
Cherchons s'il existe λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 des scalaires tels que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = P$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = P &\iff \begin{cases} \lambda_3 = a \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = b \\ \lambda_1 - 4\lambda_2 + 7\lambda_3 + 2\lambda_4 = c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 - 4\lambda_2 + 7\lambda_3 + 2\lambda_4 = c \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = b & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \lambda_3 = a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 - 4\lambda_2 + 7\lambda_3 + 2\lambda_4 = c \\ 6\lambda_2 - 7\lambda_3 - 2\lambda_4 = b - c & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_3 = a \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est échelonné, 3 pivots et 3 lignes donc il est compatible, donc tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ s'écrit comme une combinaison linéaire de P_1, P_2, P_3 et P_4.
Donc $\boxed{\text{la famille } (P_1, P_2, P_3, P_4) \text{ est génératrice de } E}$.

3. • libre ?
Soient λ, μ et γ des réels tels que $\lambda A + \mu B + \gamma C = \mathbf{0}$, montrons qu'alors $\lambda = \mu = \gamma = 0$.
Le coefficient de la ligne 1 et la colonne 2 donne $\lambda = 0$.
Le coefficient de la ligne 1 et la colonne 1 donne $2\lambda - \gamma = 0$ donc $\gamma = 0$.
Le coefficient de la ligne 2 et colonne 1 donne $-\lambda + \mu + \gamma = 0$, donc $\mu = 0$.
Donc la seule combinaison linéaire de ces matrices qui soit égale à la matrice nulle est celle dont tous les scalaires sont nuls.
$\boxed{\text{La famille } (A, B, C) \text{ est libre.}}$

- <u>génératrice de E ?</u> On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  Si $M = xA + yB + zC$ alors $\begin{pmatrix} 2x - z & x & -y + 2z \\ -x + y + z & 3x + y & 2x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
  En particulier, $x = 0$ (ligne 1 colonne 2)
  donc $z = -1$ (ligne 1 colonne 1)
  donc $y = 0$ et $y = \frac{1}{2}$ (ligne 2 colonnes 2 et 3).
  Ce n'est pas possible, donc M n'est pas combinaison linéaire de A, B et C.
  Donc $\boxed{\text{la famille formée par } A, B \text{ et } C \text{ n'est pas génératrice de } E}$.

4. • <u>libre ?</u> Soient λ et μ des réels tels que $\lambda u + \mu v = \mathbf{0}$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda u_n + \mu v_n = 0$.
En particulier, pour $n = 0$, $\lambda + 3\mu = 0$ et pour $n = 1$, $3\lambda + 3\mu = 0$.
En soustrayant les deux égalités, on obtient $\lambda = 0$ et donc $\mu = 0$.
Donc $\boxed{\text{la famille } (u, v) \text{ est libre}}$.

- <u>génératrice de F ?</u>
  Soit (w_n) une suite arithmétique. En notant r sa raison, on a $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 + nr$.
  Montrons qu'il existe λ et μ tels que $\lambda u + \mu v = w$.

$$\begin{aligned} \lambda u + \mu v = w &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \lambda u_n + \mu v_n = w_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, 2\lambda n + \lambda + 3\mu = nr + w_0 \\ &\iff \begin{cases} 2\lambda = r \\ \lambda + 3\mu = w_0 \end{cases} \\ &\iff \lambda = \frac{r}{2} \text{ et } \mu = \frac{w_0}{3} - \frac{r}{6}. \end{aligned}$$

  Ainsi, toute suite arithmétique s'écrit comme une combinaison linéaire de u et v.
  $\boxed{\text{La famille formée de } u \text{ et } v \text{ est génératrice de } F.}$

Correction 2.

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x + 2y + 3z + t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ \quad y + 4z + 2t = 0 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y + z + t \\ y = -4z - 2t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 5z + 3t \\ y = -4z - 2t \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $F = \left\{(5z + 3t, -4z - 2t, z, t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{z(5, -4, 1, 0) + t(3, -2, 0, 1) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\right\}$
Autrement dit, en notant $v_1 = (5, -4, 1, 0)$ et $v_2 = (3, -2, 0, 1)$, on constate que $F = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2)$.
Donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$, et (v_1, v_2) est une famille génératrice.
De plus, v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, donc ils forment une famille libre.
Donc $\boxed{(v_1, v_2) \text{ est une base de } F}$.

Correction 3. (réponses)

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$h'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x} - \ln(1 + x)\right)(1 + x)^{1-x}$

$l'(x) = (1 + x\cos(x))e^{\sin(x)}$

$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$

$k'(x) = -3\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\left(\arctan\left(\frac{1-x^2}{x}\right)\right)^2$

$m'(x)\frac{(x^2+1-2x^2\ln(x))\sqrt{x^2+1}}{2x(x^2+1)^2\sqrt{\ln(x)}}$

Correction 4.

1. $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{x^2(1 - x)}}{x} = \dfrac{|x|}{x}\sqrt{1 - x}$.

Or pour $x > 0$, $|x| = x$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 à droite et } f'_d(0) = 1}$.

Pour $x < 0$, $|x| = -x$ donc de même, $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 à gauche et } f'_g(0) = -1}$.

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

2. pour $x \leqslant 1$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{x\sqrt{1-x}}{-(1-x)} = \dfrac{x}{-\sqrt{1-x}}$.
Or $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{-\sqrt{1-x}} = -\infty$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 1}$.