Devoir Maison n° 23

Pour le mardi 5 mai.

Rappel : la présentation et la rédaction entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies ! Encadrez les réponses, soignez les justifications ...
Remarque : pour les exercices 1 et 2, inspirez-vous des corrections de vos TD (Exercice 9) et du corrigé du début de l'exercice 10 (chapitre Espaces Vectoriels A).

Exercice 1.

Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ? génératrices de $\mathbb{R}^3$?

1. $v = (3, 0, 4)$
2. $v_1 = (1, -5, 2)$ et $v_2 = (-2, 10 - 4)$
3. $v_1 = (2, 1, 4)$, $v_2 = (1, -1, 2)$ et $v_3 = (3, 3, 3)$
4. $v_1 = (1, -5, 2)$, $v_2 = (1, -13, 4)$, $v_3 = (1, 3, 0)$ et $v_4 = (4, 4, 2)$.

Exercice 2.

(a) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + 2x^3y = 0$.
Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et en déterminer une famille génératrice.
(b) $A = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + u_n\}$.
A est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ensemble des suites à valeurs réelles) ?

Exercice 3.

Démontrer les résultats suivants :

(a) Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(\sqrt{x})$.
(b) Si $f(x) - x \underset{x\to +\infty}{=} o(x)$ alors $f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} x$.
(c) $\dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Un exercice au choix parmi les exercices 4 et 5. :

Exercice 4.

On note : $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer par la méthode du pivot de Gauss que P est inversible et calculer P^{-1}.
(b) Vérifier que $M = PDP^{-1}$.

Un centre de vacances étudie le comportement d'un client qui a le choix chaque jour entre trois activités qui seront appelées A, B et C.

On considère que le si jour n le client a choisi une activité, il en change systématiquement le lendemain et choisit de manière équiprobable entre les deux autres activités.

Le premier jour (c'est-à-dire le jour 1), le client choisit l'activité B.

On notera A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement : « le client choisit l'activité A le jour n » (respectivement B, C) et on notera a_n (respectivement b_n, c_n) sa probabilité.

On définit également la matrice U_n par : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, ainsi $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) Par une formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel n non nul : $U_{n+1} = MU_n$.
(b) En utilisant la relation établie en **1.(b)**, en déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul : $U_n = \frac{1}{3}PD^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\begin{cases} a_n &= c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ b_n &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$.

Déterminer les limites de (a_n), (b_n) et (c_n) et interpréter.

Exercice 5.

On dispose d'une urne contenant quatre boules numérotées $1, 2, 3$ et 4. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule avec remise et on suppose qu'à chaque tirage, chacune des boules a la même probabilité d'être tirée.

On note pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus en n tirages.

On a donc $X_1 = 1$ et par exemple, si les premiers tirages donnent $2, 2, 1, 2, 1, 4, 3$ alors on a : $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 2$, $X_4 = 2$, $X_5 = 2$, $X_6 = 3$, $X_7 = 4$.

La probabilité d'un événement H est notée $\mathbf{P}(H)$.

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire Z sont notées respectivement $E(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$.

Soit A la matrice carrée d'ordre 4 définie par : $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$.

On note pour tout n de $\mathbb{N}^*$, U_n la matrice à 4 lignes et 1 colonne définie par : $U_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \\ \mathbf{P}(X_n = 3) \\ \mathbf{P}(X_n = 4) \end{pmatrix}$.

1. **(a)** Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.
(b) Calculer $E(X_2)$ et $\mathrm{Var}(X_2)$.
(c) On note F la fonction de répartition de X_2. Tracer la courbe représentative de F.

2. **(a)** Déterminer U_1.
(b) Préciser l'ensemble des valeurs prises par X_n.
(c) Établir pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la relation suivante : $U_{n+1} = AU_n$.

3. On considère les quatre matrices V_1, V_2, V_3, V_4 à 4 lignes et 1 colonne, définies par :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Établir par récurrence, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la relation suivante :

$$U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} V_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} V_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} V_3 + V_4$$

(b) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_n

4. **(a)** Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $E(X_n)$.
(b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n)$. Commenter.

Bonus