Correction du DM n° 23

❀❀ Correction 1.

1. ⋆ v n'est pas le vecteur nul donc il forme une famille libre.
⋆ $w=(1,1,1)$ n'est pas colinéaire à v donc w n'est pas dans $\text{Vect}(v)$ donc v ne forme pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

2. ⋆ $v_2=-2v_1$ donc v_1 et v_2 sont colinéaires, donc ils ne forment pas une famille libre.
⋆ Soit $w=(0,1,0)$, montrons que $w\notin \text{Vect}(v_1,v_2)$.

$$w=xv_1+yv_2 \iff \begin{cases} x-2y=0\\ -5x+10y=1\\ 2x-4y=0\end{cases} \iff \begin{cases} x-2y=0\\ 0=1 \quad L_2\leftarrow L_2+5L_1\\ 2x-4y=0\end{cases}$$

Donc le système n'a pas de solution, donc $w\notin\text{Vect}(v_1,v_2)$.
Donc la famille (v_1,v_2) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

3. On note A la matrice des vecteurs en colonnes :

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&-1&3\\4&2&3\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&\frac12&\frac32\\1&-1&3\\4&2&3\end{pmatrix} L_1\leftarrow \tfrac12 L_1$$

$$\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac32\\0&-\frac32&\frac32\\0&0&-3\end{pmatrix} \begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-4L_1\end{matrix}$$

A est de rang 3 pour 3 vecteurs donc la famille (v_1,v_2,v_3) est libre.
A est de rang 3 et on travaille dans $\mathbb{R}^3$ donc la famille (v_1,v_2,v_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

4. On note A la matrice des vecteurs en colonne.
La matrice a 3 lignes, donc le rang est au maximum 3, or il y a 4 vecteurs, donc la famille n'est pas libre.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\-5&-13&3&4\\2&4&0&2\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&-8&8&24\\0&2&-2&-6\end{pmatrix} \begin{matrix}L_2\leftarrow L_2+5L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&-8&8&24\\0&0&0&0\end{pmatrix} L_3\leftarrow L_3+\tfrac14 L_2$$

La matrice est de rang 2 alors que l'on est dans $\mathbb{R}^3$ donc la famille (v_1,v_2,v_3,v_4) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

❀❀ Correction 2.

1. On sait que $\mathcal{S}=\left\{x\mapsto \lambda e^{\frac12 x^4} \mid \lambda\in\mathbb{R}\right\}$.
On peut donc écrire $\mathcal{S}=\text{Vect}(f)$ avec $f : x\mapsto e^{\frac12 x^4}$.
Donc $\boxed{\mathcal{S} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ et } f \text{ en forme une famille génératrice}}$.

Remarque : on aurait aussi pu montrer sans résoudre que $\mathcal{S}$ était un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
⋆ la fonction nulle est solution de l'équation
⋆ si f et g sont deux solutions, et λ un nombre réel, alors $f+\lambda g$ est dérivable et $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(f+\lambda g)'(x)+2x^3(f+\lambda g)(x) &= f'(x)+\lambda g'(x)+2x^3f(x)+2x^3\lambda g(x)\\ &= f'(x)+2x^3f(x)+\lambda(g'(x)+2x^3g(x))\\ &= 0+\lambda 0 \quad \text{car } f \text{ et } g \text{ sont dans } \mathcal{S}\\ &=0\end{aligned}$$

⋆ Donc $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2. ⋆ La suite nulle est dans A car $\forall n,\ 0=3\times 0+0$.
⋆ Soient u et v deux suites de A, et λ un réel, montrons que $u+\lambda v$ est dans A.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, le terme de rang n de la suite $u+\lambda v$ est $u_n+\lambda v_n$ (définition des opérations dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).

$$\begin{aligned}\text{Et}\quad u_{n+2}+\lambda v_{n+2} &= (3u_{n+1}+u_n)+\lambda(3v_{n+1}+v_n)\\ &= 3(u_{n+1}+\lambda v_{n+1})+(u_n+\lambda v_n)\end{aligned}$$

Donc la suite $u+\lambda v$ est dans A.
⋆ Donc $\boxed{A \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

Correction 3.

(a) Soit f vérifiant $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$, montrons que $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(\sqrt{x})$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

$\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{f(x)}{x} \times \sqrt{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ par hypothèse, et $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}} = 0$, c'est-à-dire $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(\sqrt{x})$.

Donc $\underline{\text{si } f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x), \text{ alors } f(x) \underset{x\to 0}{=} o(\sqrt{x})}$.

(b) Soit f vérifiant $f(x) - x \underset{x\to +\infty}{=} o(x)$, montrons que $f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} x$.

Par hypothèse, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x) - x}{x} = 0$.

Or $\frac{f(x)-x}{x} = \frac{f(x)}{x} - 1$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Autrement dit, $f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} x$.

Donc l'implication est vraie.

(c) $\dfrac{\frac{\ln(n)}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\ln(n)}{n} \times \dfrac{\sqrt{n}}{1} = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

Or, par le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{\frac{\ln(n)}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$ soit $\boxed{\dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}$.

Correction 4.

1. (a) On trouve $\boxed{P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$

(b) $PD = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $PDP^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = M$

On a donc bien $\boxed{M = PDP^{-1}}$.

❀❀ **2. (a)** Pour un n non nul fixé, les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements (le client ne choisit qu'une seule activité, et il en choisit nécessairement une parmi les trois), donc par la formule des probabilités totales, on a :

$a_{n+1} = \mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}_{B_n}(A_{n+1})\mathbf{P}(B_n) + \mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1})\mathbf{P}(C_n)$

D'après les indications de l'énoncé, $\mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 0$ et $\mathbf{P}_{B_n}(A_{n+1}) = \mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{2}c_n$.

De même, comme $\mathbf{P}_{B_n}(B_{n+1}) = 0$ et $\mathbf{P}_{A_n}(B_{n+1}) = \mathbf{P}_{C_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$, alors $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}c_n$ et de même, $c_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}b_n$.

Ainsi, $U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \end{pmatrix} = \boxed{MU_n}$

(b) Pour tout entier n non nul, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $U_n = \dfrac{1}{3}PD^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n=1$, il faut montrer $U_1 = \frac{1}{3}PD^{1-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Or $U_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{3}PD^{1-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}PI\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} = U_1$.
Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1, quelconque fixé.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $U_k = \frac{1}{3}PD^{k-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $U_k = \frac{1}{3}PD^{k-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, en multipliant à gauche par M, on obtient

$MU_k = M\frac{1}{3}PD^{k-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}MPD^{k-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

Or, $MU_k = U_{k+1}$ d'après la question précédente, et $M = PDP^{-1}$ d'après **1.(b)**, donc :

$U_{k+1} = \frac{1}{3}PDP^{-1}PD^{k-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}PDID^{k-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}PD^{k+1-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ CQFD.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1,\ U_n = \frac{1}{3}PD^{n-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}$.

3. Comme la matrice D est diagonale, $D^{n-1} = \begin{pmatrix}1^{n-1}&0&0\\0&(-\frac{1}{2})^{n-1}&0\\0&0&(-\frac{1}{2})^{n-1}\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\text{Donc } U_n &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(-\frac{1}{2})^{n-1}&0\\0&0&(-\frac{1}{2})^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\times(-\frac{1}{2})^{n-1}\\(-\frac{1}{2})^{n-1}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\left\{\begin{array}{lll}a_n&=&c_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\b_n&=&\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{array}\right.}$

$-1 < -\frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\boxed{(a_n),\ (b_n) \text{ et } (c_n) \text{ convergent vers } \frac{1}{3}}$.
Ainsi, <u>au bout d'un certain nombre de jours les clients se répartissent de manière équiprobable dans les trois activités</u>.

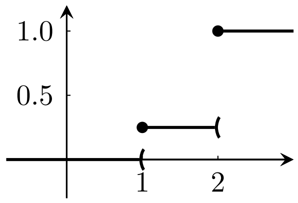
Correction 5.

1. (a) $X_2(\Omega) = \{1,2\}$ car sur deux tirages, on peut avoir un seul numéro ou deux.
$\Omega = [\![1,4]\!]^2$ de cardinal 16.
L'événement $(X_2 = 1)$ correspond aux issues où les deux boules tirées sont identiques, il y en a 4, et la situation est équiprobable, donc $\mathbf{P}(X_2=1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.
$(X_2 = 1)$ est le contraire, donc sa probabilité est $\frac{3}{4}$.
Donc $\boxed{X_2(\Omega) = \{1,2\} \text{ et } \mathbf{P}(X_2=1) = \frac{1}{4} \text{ et } \mathbf{P}(X_2=2) = \frac{3}{4}}$.

(b) $E(X_2) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{4} = \boxed{\frac{7}{4}}$.

$E(X_2^2) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$ donc d'après la formule de König, $V(X) = \frac{13}{4} - (\frac{7}{4})^2 = \boxed{\frac{3}{16}}$.

(c)



2. **(a)** $U_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_1 = 1) \\ \mathbf{P}(X_1 = 2) \\ \mathbf{P}(X_1 = 3) \\ \mathbf{P}(X_1 = 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car après 1 tirage on ne peut avoir qu'un seul nombre.

(b) $\boxed{X_1(\Omega) = \{1\},\ X_2(\Omega) = \{1;2\},\ X_3(\Omega) = \{1;2;3\} \text{ et pour } n \geqslant 4, X_n(\Omega) = \{1;2;3;4\}}$.

(c) Pour $n \geqslant 4$, $(X_n = 1)$, $(X_n = 2)$, $(X_n = 3)$ et $(X_n = 4)$ forment un système complet d'événements, et la formule des proabilités totales donne :

⋆ $\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbf{P}(X_n = 1)\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) + \mathbf{P}(X_n = 2)\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1)$
$+ \mathbf{P}(X_n = 3)\mathbf{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 1) + \mathbf{P}(X_n = 4)\mathbf{P}_{(X_n=4)}(X_{n+1} = 1)$.
Or pour que $(X_{n+1} = 1)$ soit réalisé, il faut en premier lieu que X_n soit égal à 1, et ensuite il faut piocher la même boule que celle déjà tombée, donc $\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{4}$.
Donc $\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbf{P}(X_n = 1) \times \frac{1}{4} + 0$.

⋆ De même, $\mathbf{P}(X_{n+1} = 2) = \mathbf{P}(X_n = 1)\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) + \mathbf{P}(X_n = 2)\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2)$
$+ \mathbf{P}(X_n = 3)\mathbf{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 2) + \mathbf{P}(X_n = 4)\mathbf{P}_{(X_n=4)}(X_{n+1} = 2)$
Et pour que $(X_{n+1} = 2)$ soit réalisé, il faut que X_n soit inférieur ou égal à 2.
De plus, si $X_n = 1$, pour avoir $X_{n+1} = 2$, il faut que le numéro change au tirage $n+1$, donc que le résultat du $(n+1)$-ième tirage soit l'un des 3 numéros qui ne sont pas encore apparus, sur les 4 possibles, donc $\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \frac{3}{4}$.
Et si $X_n = 2$, alors, pour avoir $X_{n+1} = 2$, il faut que le numéro pioché au $(n+1)$-ième tirage soit le même que l'un des deux déjà sortis, ce qui fait 2 chances sur 4.
Finalement, $\mathbf{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{3}{4}\mathbf{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 2)$.

⋆ $(X_{n+1} = 3)$ se produit dans deux cas :
- $(X_n = 3)$ et on pioche l'une des trois boules déjà piochées, cela donne une probabilité de $\frac{3}{4}$
- $(X_n = 2)$ et on pioche l'une des 2 boules pas encore piochées, donc probabilité de $\frac{1}{2}$.
Donc la formule des probabilités totales donne $\mathbf{P}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 2) + \frac{3}{4}\mathbf{P}(X_n = 3)$.

⋆ Pour $(X_{n+1} = 4)$, c'est soit $(X_n = 3)$ et on pioche le dernier numéro : $\frac{1}{4}$, soit $(X_n = 4)$ et alors on aura $(X_{n+1} = 4)$ de façon certaine.
Donc $\mathbf{P}(X_{n+1} = 4) = \frac{1}{4}\mathbf{P}(X_n = 3) + \mathbf{P}(X_n = 4)$.

Donc, pour $n \geqslant 4$, on a $U_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 1) \times \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4}\mathbf{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 2) \\ \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 2) + \frac{3}{4}\mathbf{P}(X_n = 3) \\ \frac{1}{4}\mathbf{P}(X_n = 3) + \mathbf{P}(X_n = 4) \end{pmatrix} = AU_n$.

Pour $n = 1$, l'égalité est vérifiée aussi : $AU_1 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = U_2$ d'après **1(a)**.

Pour $n = 2$ et $n = 3$, l'égalité est vraie aussi (on peut utiliser la fomule des probabilités dans les systèmes complets d'événements adaptés).

3. **(a)** Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition $U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} V_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} V_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} V_3 + V_4$.

Initialisation : $U_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

et $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{1-1} V_1 + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-1} V_2 + 3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{1-1} V_3 + V_4 = V_1 + 3V_2 + 3V_3 + V_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

Donc l'égalité est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : Soit k un entier naturel non nul quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $U_k = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1} V_1 + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} V_2 + 3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1} V_3 + V_4$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
U_{k+1} = AU_k &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} AV_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} AV_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} AV_3 + AV_4\\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-\frac{3}{4}\\\frac{3}{4}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{3}{4}\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \tfrac{1}{4}V_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \tfrac{1}{2}V_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \tfrac{3}{4}V_3 + V_4\\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{k} V_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k} V_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{k} V_3 + V_4 \qquad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

(b) Nous avons déjà celles de X_1 et de X_2.
Pour les autres, on utilise la relation obtenue à la question précédente.

- $X_3 : X_3(\Omega) = \{1; 2; 3\}$, $\mathbf{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{16}$, $\mathbf{P}(X_3 = 2) = \frac{9}{16}$ et $\mathbf{P}(X_3 = 3) = \frac{3}{8}$.
- pour $n \geqslant 4 : X_n(\Omega) = \{1; 2; 3; 4\}$ et :
  $\mathbf{P}(X_n = 1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
  $\mathbf{P}(X_n = 2) = -3\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
  $\mathbf{P}(X_n = 3) = 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} - 6\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + 3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$
  $\mathbf{P}(X_n = 4) = -\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} - 3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1} + 1.$

4. (a)
$$\begin{aligned}E(X_n) &= (1-6+9-4)\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} + (6-18+12)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + (9-12)\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} + 4 \ .\\
&= \boxed{-4\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} + 4}\end{aligned}$$

(b) $-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = 4}$.
Ce résultat peut s'interpréter par le fait qu'au bout d'un certain nombre de tirages, en moyenne on aura obtenu les 4 numéros possibles.

Bonus

On trouve 43 (le bonhomme a 2 chaussures et porte 2 cornets de frites !).