Correction du Devoir Maison n° 22

Exercice 1.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{u_n+3}$.

1. Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition $u_n \geqslant 1$.

Initialisation : $u_0 = 2 \geqslant 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_k \geqslant 1$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} u_{k+1} - 1 &= \tfrac{3u_k+1}{u_k+3} - 1 \\ &= \tfrac{3u_k+1-(u_k+3)}{u_k+3} \\ &= \tfrac{2u_k-2}{u_k+3} \\ &= \tfrac{2(u_k-1)}{u_k+3} \end{aligned}$$

Or $u_k \geqslant 1$ par hypothèse, donc $2(u_k-1) \geqslant 0$ et $u_k + 3 > 0$.
Donc $u_{k+1} - 1 \geqslant 0$ donc $u_{k+1} \geqslant 1$, c'est-à-dire $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+1}{u_n+3} - \frac{u_n(u_n+3)}{u_n+3} = \frac{3u_n+1-u_n^2-3u_n}{u_n+3} = \frac{1-u_n^2}{u_n+3} = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+3}$
Or $u_n \geqslant 1$ donc le numérateur est négatif et le dénominateur positif, donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
Donc (u_n) est décroissante.

3. (u_n) est décroissante et minorée (par 1), donc d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

4. ⋆ (u_{n+1}) est extraite de (u_n) donc elle converge vers la même limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.
⋆ la fonction $x \mapsto \frac{3x+1}{x+3}$ est continue en ℓ (fraction rationnelle qui ne s'annule pas en ℓ car $\ell \geqslant 1$), et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \dfrac{3\ell+1}{\ell+3}$
(*sur ce point on peut aussi simplement raisonner par opérations sur les limites*)
⋆ Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ donc par unicité de la limite, $\boxed{\ell = \frac{3\ell+1}{\ell+3}}$.

$$\begin{aligned} \ell = \tfrac{3\ell+1}{\ell+3} &\iff \ell(\ell+3) = 3\ell+1 \text{ (et } \ell+3 \neq 0) \\ &\iff \ell^2 = 1 \\ &\iff \ell = 1 \text{ ou } \ell = -1. \end{aligned}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$, donc $\ell \geqslant 1$.
Donc la seule possibilité est $\boxed{\ell = 1}$.

Exercice 2.

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - 2x + 3$, pour tout $x \in]0;+\infty[$.

1. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} -2x+3 = -2\times 0 + 3 = 3$ donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$.
Donc $\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C} \text{ a une asymptote verticale d'équation } x = 0}$.

(b) $3 \underset{x\to+\infty}{=} o(-2x)$ et d'après le théorème des croissances comparées, $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(-2x)$.
Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -2x$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

2. f est dérivable pour $x > 0$ par somme de fonctions usuelles dérivables sur $]0;+\infty[$.
Par somme, $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{x} - 2}$.
Donc $f'(x) = \frac{1-2x}{x}$ et $x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2x$.

Donc

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2-\ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) - 2 \times \tfrac{1}{2} + 3 \\ &= -\ln(2) - 1 + 3 \\ &= 2 - \ln(2) \\ &\approx 1,3 \end{aligned}$$

3. **(a)** • sur $]0; \frac{1}{2}]$:

$\star$ f est continue (somme de deux fonctions usuelles continues sur cet intervalle)
$\star$ f est strictement croissante
$\star$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $f(\frac{1}{2}) = 2 - \ln(2)$

d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]0; \frac{1}{2}[$ sur $]-\infty; 2-\ln(2)]$
Or $0 \in]-\infty; 2-\ln(2)]$ (car $2-\ln(2) \approx 1,3$) donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; \frac{1}{2}]$.

• sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$:

$\star$ f est continue et strictement décroissante
$\star$ $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = 2 - \ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

donc f réalise une bijection de $]\frac{1}{2}; +\infty[$ sur $]-\infty; 2-\ln(2)[$, et 0 appartient à cet intervalle, donc l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$

Donc $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet exactement deux solutions dans }]0; +\infty[}$.
La solution notée β est la plus grande des deux, c'est donc celle qui est dans $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

(b) $f(1) = 1$ et
$$\begin{aligned} f(2) &= \ln(2) - 2 \times 2 + 3 \\ &\approx 0,7 - 4 + 3 \\ &\approx -0,3. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(1) > f(\beta) > f(2)$ et 1, β et 2 sont trois nombres de $]\frac{1}{2}, +\infty[$, intervalle sur lequel f est strictement décroissante.
Donc $1 < \beta < 2$. Soit $\boxed{\beta \in]1; 2[}$.