Devoir Maison n° 22

Pour le mardi 13 avril.

Rappel : la présentation et la rédaction entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies ! Encadrez les réponses, soignez les justifications ...

Exercice 1.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{u_n+3}$.

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \geqslant 0,\ u_n \geqslant 1$.

2. Déterminer le signe que $u_{n+1} - u_n$ et en déduire le sens de variation de (u_n).

3. Justifier que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

4. Montrer que $\ell = \frac{3\ell+1}{\ell+3}$, résoudre cette équation puis déterminer ℓ.

Exercice 2.

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - 2x + 3$, pour tout $x \in]0; +\infty[$.

1. **(a)** Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Que pouvez-vous en déduire sur la courbe $\mathcal{C}$?

(b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$. Dresser le tableau des variations de f. On fera figurer les limites aux bornes. On déterminera aussi l'expression de $f(\frac{1}{2})$ et on en donnera une valeur approchée. *On donne* $\ln(2) \approx 0,7$.

3. **(a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0; +\infty[$ avec $\alpha < \beta$.

(b) Justifier que $\beta \in]1; 2[$.