Devoir Maison n° 19

Pour le mardi 24 mars.

Rappel : la présentation et la rédaction entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies ! Encadrez les réponses, soignez les justifications ...

Exercice 1.

Déterminer un équivalent simple de chacune des suites ci-dessous puis donner sa limite.

$u_n = \sqrt{9n^2+3n-1} - 3n \qquad v_n = \dfrac{3n^7 - 7n^2 + 1}{\ln(n) - \sqrt{n}} \qquad w_n = (e^{3n} + n)\left(5 + \dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 2.

On étudie le comportement d'un consommateur X à partir d'une semaine donnée (« semaine 1 »).
Ce consommateur choisit chaque semaine chez le pâtissier un dessert parmi les trois notés A, B et C.
On considère en outre que :

- si X a choisi le dessert A la semaine n, alors la semaine $n+1$ il choisit :
  le dessert A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou le dessert C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.
- si X a choisi le dessert B la semaine n, alors la semaine $n+1$ il choisit :
  le dessert A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou le dessert B avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.
- si X a choisi le dessert C la semaine n, il reprend le dessert C la semaine $n+1$.
- Le consommateur choisit de manière équiprobable son dessert la première semaine.

On notera pour tout entier naturel non nul n :

A_n l'événement : « X a choisi le dessert A la n-ième semaine ».
B_n l'événement : « X a choisi le dessert B la n-ième semaine ».
C_n l'événement : « X a choisi le dessert C la n-i-ème semaine ».

On note aussi $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$.

1. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier avec soin que

$$P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n)$$

Donner de même les relations exprimant $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$.

2. Déterminer la matrice M telle que pour tout entier naturel non nul n : $U_{n+1} = MU_n$.

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $U_n = \dfrac{1}{3}M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Montrer que pour tout entier naturel k, $M^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^k \end{pmatrix}$

5. En déduire, en fonction de n, les probabilités $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$, ainsi que leurs limites quand n tend vers $+\infty$.